RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Une équation différentielle est une équation <u>dont la solution est une fonction</u>. Dans de nombreux domaines (cinétique chimique, électricité, mécanique, nucléaire, …) **les lois de la physique conduisent à des équations différentielles** que l'on cherche à résoudre pour établir un modèle mathématique permettant de prévoir l'évolution d'une grandeur au cours du temps**.**

→ Les différentes équations différentielles et leurs solutions générales

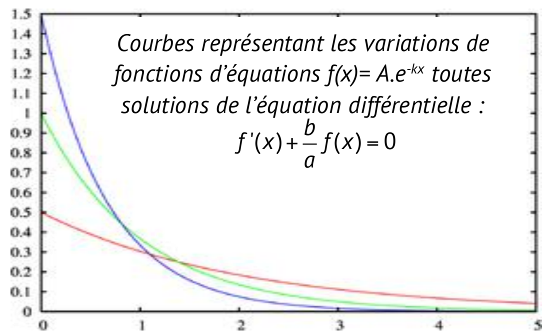
	Côté mathématiques		Côté physique-chimie	
Types d'équa-diff (a,b,c et d sont des constantes)	Cas particuliers	Solutions générales	Ecriture (G est la grandeur étudiée)	Solutions en SPC
Equations du 1er ordre *(faisant intervenir la dérivée 1ère de la fonction)* a f'(x) + b f(x) = c	Cas où b = 0 a f'(x) = c soit $f'(x)=\frac{c}{a}$	f(x) = primitive par rapport à x de f'(x)	$\frac{dG}{dt}=K$	G(t) est déterminée par primitive de K
			Ex $\frac{dv_y}{dt}=-g$	$v_y(t) = - gt + v_{0y}$
	Cas où c = 0 *(1er ordre sans 2nd membre)* a f'(x) + b f(x) = 0 $f'(x)+\frac{b}{a}f(x)=0$	**f(x)** = $A.e^{-kx}$ avec A et k constantes	$\frac{dG}{dt}+\frac{b}{a}G=0$	**G(t)** = $A.e^{-kt}$
	Cas où b et c ≠ 0 *(1er ordre avec 2nd membre)* a f'(x) + b f(x) = c	**f(x)** = $A.e^{-kx}+B$ avec A,B et k constantes	$\frac{dG}{dt}+\frac{b}{a}G=\frac{c}{a}$	**G(t)** = $A.e^{-kt}+B$
Equations du 2nd ordre (faisant intervenir la dérivée seconde de la fonction) af''(x)+bf'(x)+cf(x)= d	Cas où b et d = 0 *(2nd ordre sans dérivée 1ère et sans second membre)* a f''(x) + c f(x)= 0 $f''(x)+\frac{c}{a}f(x)=0$	**f(x)** = $A\cos(\omega_0.x+\varphi)$ avec A,ω_0 et φ constantes ou **f(x)** = $A\cos(\omega_0.x+\varphi)$ + $B\sin(\omega_0.x+\varphi)$	$\frac{d^2G}{dt^2}+\frac{b}{a}\frac{dG}{dt}=0$	**G(t)** = $A\cos(\omega_0.t+\varphi)$
Post-bac	Cas où d = 0 *(2nd ordre sans 2nd membre)* a f''(x) + b f'(x) + c f(x)= 0	**f(x)** = $A.e^{-k.x}\cos(\omega_0.x+\varphi)$ avec A, k, ω_0 et φ constantes	$\frac{d^2G}{dt^2}+\frac{b}{a}\frac{dG}{dt}+\frac{c}{a}G=0$	**G(t)** = $A.e^{-k.t}\cos(\omega_0.t+\varphi)$
	…	…	…	…

→ Solutions particulières en SPC

Du fait des constantes, une équation différentielle admet une infinité de solutions générales, le physicien cherche la solution particulière correspond à la situation étudiée.

Il faut donc déterminer les valeurs des constantes, pour cela :

- On place la solution générale dans l'équation différentielle et vérifie les conditions de validité.
- On utilise les conditions initiales (t=0) et/ou finales (t=∞)



Courbes représentant les variations de fonctions d'équations f(x)= $A.e^{-kx}$ toutes solutions de l'équation différentielle : $f'(x)+\frac{b}{a}f(x)=0$

→ La fonction exponentielle et sa dérivée

	Côté maths		Côté physique-chimie
Dérivées de fonctions a.e^{kx}	À une fonction exponentielle : f : x → a e^{kx} On associe la fonction dérivée f' : x → k.a.e^{kx} *Par exemple :*		À la variation d'une grandeur modélisée par : G(t) = a e^{kt} On associe la fonction dérivée $\frac{dG}{dt}=a.k.e^{kt}$
	f	f'	*Par exemple : si G(t) = 5 e^{-t} alors* $\frac{dG}{dt}=-5.e^{-t}$
	f(x) = e^x	f'(x) = e^x	
	f(x) = - 3 e^{2x}	f'(x) = - 6 e^{2x}	*si G(t) = 5 e^{-2t} alors* $\frac{dG}{dt}=-10.e^{-2t}$
	f(x) = - 4 e^{-3x}	f'(x) = 12 e^{-3x}	

Remarques : - *Valeurs particulières de la fonction exponentielle : e^0 = 1 ;* $\lim_{x\to-\infty}(e^x)=0$

- *Dans certains manuels (et donc dans un exercice), une fonction exponentielle peut être notée f(x) =a exp(kx)*
- *La fonction réciproque de la fonction exponentielle est la fonction « logarithme népérien » noté ln :*
  si a = e^b alors ln(a) =b

APPLICATIONS 1 : S'entrainer à dériver quelques fonctions exponentielles

Déterminer les dérivées pour les fonctions ci-dessous :

1.1. Côté maths : $f_1(x) = 7\ e^{4x}$; $f_2(x) = 5\ e^{-6x}$; $f_3(x) = 2\ e^{-x} + 8$; $f_4(x) = 9\times(2 + e^{-x})$

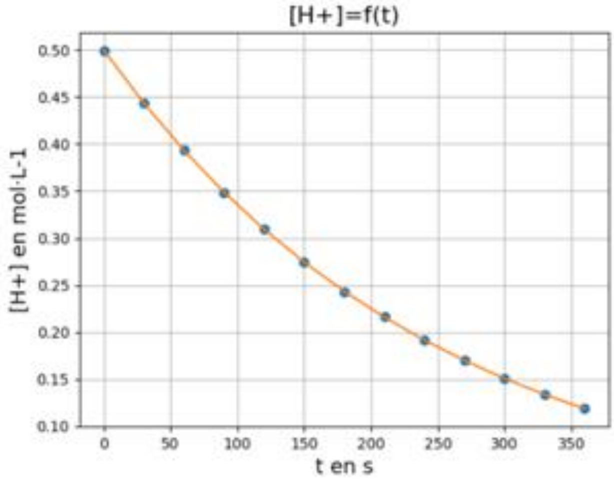
1.2. Côté PC : $x(t) = 7{,}1\times e^{4{,}0t}$; $N(t) = 5{,}0\times e^{-2{,}1t}$; $\theta(t) = 2{,}12\times\ e^{-5{,}48t} + 8{,}23$

APPLICATION 2 : Etablir une équation différentielle et en chercher la solution particulière en cinétique chimique :

On suit l'évolution temporelle de la réaction entre le magnésium Mg et les ions hydrogène H^+ dont l'équation est :

$$\mathbf{Mg_{(s)} + 2\ H^+_{(aq)} \rightarrow Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)}}$$

La concentration effective en ions H^+ décroit au cours du temps selon le graphe ci-dessous :



On a vu (act6c) que la vitesse volumique de consommation des ions H^+ suit une loi d'ordre 1 par rapport au réactif H^+ :

$\mathbf{v_{C,H+} = k_T\ [H^+]}$ où k_T est la constante de vitesse et vaut ici $k_T \approx 3{,}8\times 10^{-3}\ s^{-1}$

2.1. En s'appuyant sur la définition de la vitesse volumique, établir l'équation différentielle pour la grandeur $[H^+]$

2.2. Préciser l'ordre de cette équation différentielle et sa solution générale.

2.3. En plaçant la solution générale dans l'équation différentielle, montrer que la constante k de la solution générale vaut k_T

2.4. Déterminer l'autre constante sachant qu'à t=0 s, on avait $[H^+]_0 = 0{,}50\ mol{\cdot}L^{-1}$

2.5. Ecrire la fonction correspondant à la solution particulière modélisant l'évolution de $[H^+]$ au cours du temps.

2.6. Utiliser la modélisation obtenue pour calculer la valeur de $[H^+]$ à t = 300 s.

APPLICATION 3 : Equation différentielle en mécanique :

On considère la chute verticale d'une balle de ping-pong de masse m dans un référentiel galiléen auquel on associe le repère d'espace (O, x, y) *y étant orienté vers le bas et O correspondant à la position initiale du système.*

Le système {balle} subit :

- son poids de norme P = m.g
- la force de frottement de l'air opposée au mouvement et dont la norme est proportionnelle à la vitesse du système : f = μ.v

En appliquant la 2ème loi de Newton, on montre que la vitesse v(t) est régit par l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{m}v = g$

3.1. Préciser l'ordre de cette équation donner sa solution générale.

3.2. On admet $k = \frac{\mu}{m}$ et donc que la solution de l'équation différentielle est de la forme $v(t) = A.e^{-\frac{\mu}{m}t} + B$

En remplaçant la solution proposée dans l'équation différentielle, établir qu'il faut que $B = \frac{m.g}{\mu}$.

3.3. Déterminer l'expression de la constante A en utilisant le fait la vitesse initiale de la balle est nulle.

3.4. Donner l'expression littérale de la fonction v(t) modélisant l'évolution de la valeur de la vitesse au cours du temps.

3.5. Déduire de cette solution particulière l'expression de la vitesse limite de la balle (quand $t \rightarrow \infty$)

Bonus pour l'application 3 :

Faire un schéma de la situation en représentant le repère d'espace, la balle à une position quelconque (t≠0), le vecteur accélération en rouge, le vecteur vitesse en vert et les forces en bleu.

En appliquant la 2ème loi de Newton, établir l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{m}v = g$

CORRECTION APPLICATIONS 1 : S'entrainer à dériver quelques fonctions exponentielles

Déterminer les dérivées pour les fonctions ci-dessous :

1.1. Côté maths : $f_1(x) = 7\ e^{4x}$ $\Rightarrow$ **$f_1'(x) = 28\ e^{4x}$** ; $f_2(x) = 5\ e^{-6x}$ $\Rightarrow$ **$f_2'(x) = -30\ e^{-6x}$** ; $f_3(x) = 2\ e^{-x} + 8$ $\Rightarrow$ **$f_3'(x) = -2\ e^{-x}$** ; $f_4(x) = 9\times(2 + e^{-x}) = 18 + 9\ e^{-x}$ $\Rightarrow$ **$f_4'(x) = -9\ e^{-x}$**

1.2. Côté PC : $x(t) = 7{,}1\times e^{4{,}0t}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dx}{dt}$ **$= 28{,}4\times e^{4{,}0t}$** ; $N(t) = 5{,}0\times e^{-2{,}1t}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dN}{dt}$ **$= -10{,}5\times e^{-2{,}1t}$** ;

$\theta(t) = 2{,}12\times e^{-5{,}48t} + 8{,}23$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\theta}{dt}$ **$\approx 11{,}6\times e^{-5{,}48t}$**

CORRECTION APPLICATIONS 2 : Equation différentielle en cinétique chimique :

On suit l'évolution temporelle de la réaction entre le magnésium Mg et les ions hydrogène H^+ dont l'équation est :

$$\mathbf{Mg_{(s)} + 2\ H^+_{(aq)} \longrightarrow Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)}}$$

La concentration effective en ions H^+ décroit au cours du temps selon le graphe ci-dessous :

On a vu (act6c) que la vitesse volumique de consommation des ions H^+ suit une loi d'ordre 1 par rapport au réactif H^+ :

$v_{C,H^+} = k_T\ [H^+]$ où k_T est la constante de vitesse et vaut ici $k_T \approx 3{,}8\times 10^{-3}\ s^{-1}$

2.1. En s'appuyant sur la définition de la vitesse volumique, établir l'équation différentielle pour la grandeur $[H^+]$

On a une loi d'ordre 1 pour la vitesse $v_{c,H^+} = k_T.[H^+]$ **et on sait, par définition, que** $v_{c,H^+} = -\dfrac{d[H^+]}{dt}$

Donc $-\dfrac{d[H^+]}{dt} = k_T.[H^+]$ **soit** $\dfrac{d[H^+]}{dt} + k_T.[H^+] = 0$

2.2. Préciser l'ordre de cette équation différentielle et sa solution générale.

Il s'agit d'une équation différentielle du 1er ordre sans second membre *(de la forme* $\dfrac{dG}{dt} + \dfrac{b}{a}G = 0$ *)*

Donc la solution générale de cette équation est une fonction $[H^+](t) = A.e^{-kt}$

2.3. En plaçant la solution générale dans l'équation différentielle, montrer que la constante k de la solution générale vaut k_T

On a donc $\dfrac{d[H^+]}{dt} + k_T.[H^+] = 0$ **avec** $[H^+](t) = A.e^{-kt}$ **et donc** $\dfrac{d[H^+]}{dt} = -kA.e^{-kt}$

Soit $-k\ A.e^{-kt} + k_T A.e^{-kt} = 0$

Où $(k_T - k)\ A.e^{-kt} = 0$ **donc la solution générale ne vérifie l'équation (quelque soit t) que si $k = k_T$**

2.4. Déterminer l'autre constante sachant qu'à t=0 s, on avait $[H^+]_0 = 0{,}50\ mol{\cdot}L^{-1}$

On a $[H^+](t) = A.e^{-k_T.t}$

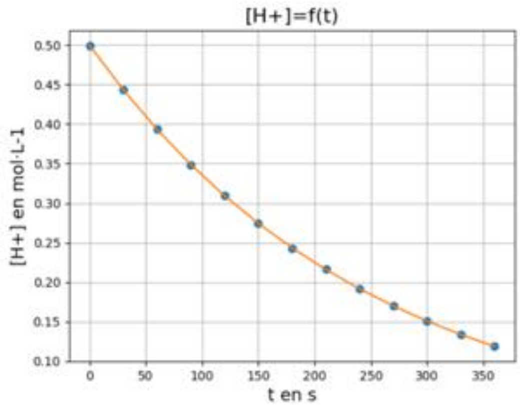
Donc $[H^+](0) = A.e^{-k_T\times 0} = A.e^0 = A$

Or on a $[H^+](0) = [H^+]_0 = 0{,}50\ mol{\cdot}L^{-1}$ **donc** $A = [H^+]_0 = 0{,}50\ mol{\cdot}L^{-1}$

2.5. Ecrire la fonction correspondant à la solution particulière modélisant l'évolution de $[H^+]$ au cours du temps.

Au final la solution particulière de cette équation est la fonction

$[H^+](t) = [H^+]_0.e^{-k_T\times t} = 0{,}50\ e^{3{,}8\times 10^{-3}t}$



2.6. Utiliser la modélisation obtenue pour calculer la valeur de $[H^+]$ à t = 300 s.

En utilisant la modélisation on trouve $[H^+](300s) = 0{,}50\ e^{3{,}8\times 10^{-3}\times 300} \approx 0{,}16\ mol{\cdot}L^{-1}$ **ce qui est bien cohérent avec la valeur obtenue expérimentalement**

(lecture sur le graphe à t =300 s, $[H^+] \approx 0{,}15\ mol{\cdot}L^{-1}$)

CORRECTION APPLICATIONS 3 : Equation différentielle en mécanique :

On considère la chute verticale d'une balle de ping-pong de masse m dans un référentiel galiléen auquel on associe le repère d'espace (O, x, y) *y étant orienté vers le bas et O correspondant à la position initiale du système.*

Le système {balle} subit :

- son poids de norme P = m.g
- la force de frottement de l'air opposée au mouvement et dont la norme est proportionnelle à la vitesse du système : f = μ.v

En appliquant la 2ème loi de Newton, on montre que la vitesse v(t) est régit par l'équation différentielle $\frac{dv}{dt}+\frac{\mu}{m}v=g$

3.1. Préciser l'ordre de cette équation donner sa solution générale.

Il s'agit donc d'une équation différentielle du 1er ordre avec second membre *(de la forme f'(x) + a f(x) = b)*

Donc sa solution générale est de la forme $v(t)=A.e^{-kt}+B$

3.2. On admet $k=\frac{\mu}{m}$ et donc que la solution de l'équation différentielle est de la forme $v(t)=A.e^{-\frac{\mu}{m}t}+B$

En remplaçant la solution proposée dans l'équation différentielle, établir qu'il faut que $B=\frac{m.g}{\mu}$

On a donc $\frac{dv}{dt}+\frac{\mu}{m}v=g$ **avec** $v(t)=A.e^{-\frac{\mu}{m}t}+B$ **et donc** $\frac{dv}{dt}=-\frac{\mu}{m}A.e^{-\frac{\mu}{m}t}$

Soit $-\frac{\mu}{m}A.e^{-\frac{\mu}{m}t}+\frac{\mu}{m}(A.e^{-\frac{\mu}{m}t}+B)=g$

$\cancel{-\frac{\mu}{m}A.e^{-\frac{\mu}{m}t}}+\cancel{\frac{\mu}{m}A.e^{-\frac{\mu}{m}t}}+\frac{\mu}{m}B=g$

Donc $\frac{\mu}{m}B=g$ **donc la solution proposée ne vérifie bien l'équation que pour** $B=\frac{m.g}{\mu}$

3.3. Déterminer l'expression de la constante A en utilisant le fait la vitesse initiale de la balle est nulle.

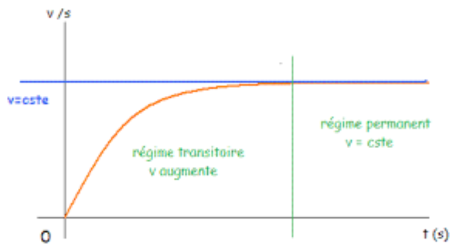
On a $v(t)=A.e^{-\frac{\mu}{m}t}+\frac{mg}{\mu}$

Donc $v(0)=A.e^{0}+\frac{mg}{\mu}=A+\frac{mg}{\mu}$

Or on a $v(0)=0$ **donc** $A+\frac{mg}{\mu}=0$ **soit** $A=-\frac{mg}{\mu}$

3.4. Donner l'expression littérale de la fonction v(t) modélisant l'évolution de la valeur de la vitesse au cours du temps.

On a donc $v(t)=-\frac{mg}{\mu}.e^{-\frac{\mu}{m}t}+\frac{mg}{\mu}$ **soit au final** $v(t)=\frac{mg}{\mu}(1-e^{-\frac{\mu}{m}t})$

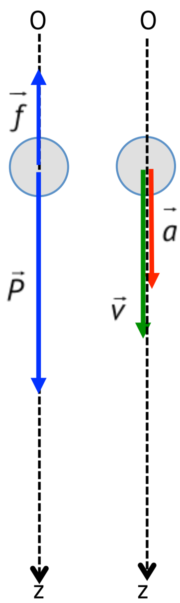


3.5. Déduire de cette solution particulière l'expression de la vitesse limite de la balle

Quand t $\rightarrow\infty$ **alors** $e^{-\frac{\mu}{m}t}\rightarrow$ **0** **donc** $v(t)=\frac{mg}{\mu}(1-e^{-\frac{\mu}{m}t})$

<u>Bonus pour l'application 3</u> :

Faire un schéma de la situation en représentant le repère d'espace, la balle à une position quelconque (t≠0), le vecteur accélération en rouge, le vecteur vitesse en vert et les forces en bleu.



En appliquant la 2ème loi de Newton, établir l'équation différentielle $\frac{dv}{dt}+\frac{\mu}{m}v=g$

D'après la 2ème loi de Newton	$m.\vec{a}=\sum\vec{F}_{ext}$
Soit ici	$m.\vec{a}=\vec{f}+\vec{p}$
Donc en projetant sur Oz :	$m.a_z=P_z+f_Z$
Soit :	$m.\frac{dv_z}{dt}=P_z+f_Z=m.g_z+\mu.v_Z$
En tenant compte des orientations	$m.\frac{dv}{dt}=m.g-\mu.v$
D'où	$\frac{dv}{dt}+\frac{\mu}{m}v=g$