

Chapitre 4 : Cinématique du point

Capacités exigibles	☺	☹
Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.		
Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse		
Citer et exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire.		
Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme		
Capacités expérimentales		
Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées ou les représentations des vecteurs vitesse et accélération.		
Capacité numérique		
Représenter, à l'aide d'un langage de programmation, des vecteurs accélération d'un point lors d'un mouvement.		
Capacité mathématique		
Dériver une fonction.		

I) Base de la cinématique

La **cinématique** est l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le provoquent.

1) Notion de système et de centre d'inertie

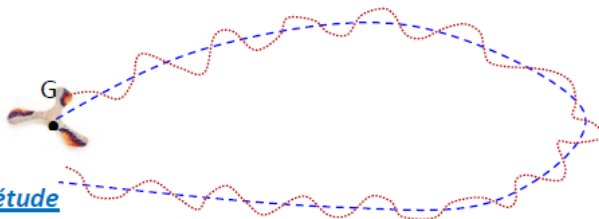
On appelle **système**, l'objet ou l'ensemble d'objets auxquels on s'intéresse.

Les systèmes que nous étudierons seront considérés comme **ponctuels**, c'est-à-dire que leurs dimensions seront suffisamment petites pour que l'on puisse les assimiler à un point.

On définit le **centre de masse G** d'un solide, appelé aussi **centre de gravité**, comme étant le point de ce solide dont la description du mouvement est la plus simple.

Exemple : lancé d'un boomerang :

→ Le mouvement du centre de masse du boomerang est plus simple à décrire que celui de ses extrémités.



2) Référentiel d'étude

a) Définition

Le référentiel est le **solide de référence** par rapport auquel on étudie le mouvement d'un système.

Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie (ou première loi de Newton) est vérifié dans ce référentiel

b) Référentiels usuels considérés comme galiléens

- Le **référentiel terrestre** (solide de référence lié au sol terrestre) est pour l'étude de mouvements au voisinage du sol terrestre.
- Le **référentiel géocentrique** (solide de référence lié au centre de la Terre) pour l'étude des satellites en mouvement autour de la Terre.
- Le **référentiel héliocentrique** (solide de référence lié au centre du Soleil) pour l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil.

c) Repères d'espace et de temps

La description précise d'un mouvement dans un référentiel donné nécessite de se donner **un repère d'espace** (pour repérer les positions) et **un repère de temps** (pour repérer les dates)

→ Repères d'espace cartésien orthonormé

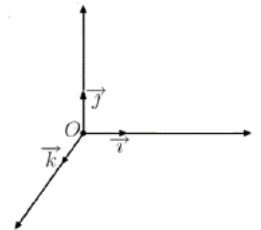
$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: Repère à 3 dimensions pour décrire un mouvement dans l'espace

$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$: Repère à 2 dimensions pour décrire un mouvement sur un plan

$\mathcal{R}(O, \vec{i})$: Repère à 1 dimension pour décrire un mouvement sur une droite

O : Origine du repère = point fixe dans le référentiel d'étude.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: 3 vecteurs unitaires orthogonaux.



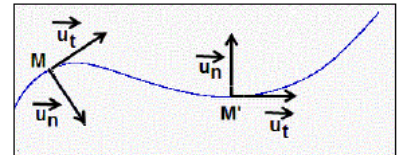
→ Repère de Frenet

$\mathcal{R}(M, \vec{u}_n, \vec{u}_t)$

M : Origine du repère = point du système en mouvement

\vec{u}_t : vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire

\vec{u}_n : vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{u}_t et orienté vers l'intérieur de la trajectoire



→ Repère du temps



Le repérage du temps se fait avec une horloge.

La date t d'un événement = durée qui s'écoule depuis l'instant (choisi comme origine du temps) où l'on a déclenché l'horloge.

3) Vecteur position dans un repère cartésien

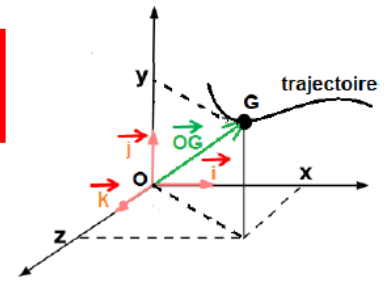
Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la position de G est repérée par le vecteur position \overrightarrow{OG}

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x = projection de \overrightarrow{OG} sur l'axe $O\vec{i}$

y = projection de \overrightarrow{OG} sur l'axe $O\vec{j}$

z = projection de \overrightarrow{OG} sur l'axe $O\vec{k}$



Si le mobile est en mouvement, les coordonnées x , y , et z du vecteur position varient donc au cours du temps t :

on appelle équations horaires du mouvement les fonctions $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$

Pour déterminer l'équation de la trajectoire il faut éliminer la variable temps t entre les coordonnées.

Remarque :

$$\|\overrightarrow{OG}(t)\| = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Application n°1 : On donne les équations horaires du mouvement de G

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{pmatrix} x(t) = 2t \\ y(t) = 8t^2 - 3t - 2 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

- Où se trouve le point G à la date $t = 10$ s ?
- A quelle distance du point O se trouve-t-il à cette même date ?
- Déterminer l'équation et la nature de la trajectoire décrite par le point G.

4) Vecteur vitesse

a) Définition

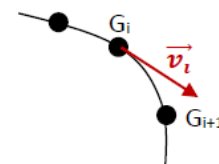
Le vecteur vitesse à une date t représente la variation du vecteur position pendant un intervalle de temps très court autour de la date t .

Il est alors défini comme la **dérivée** du vecteur position **par rapport au temps**

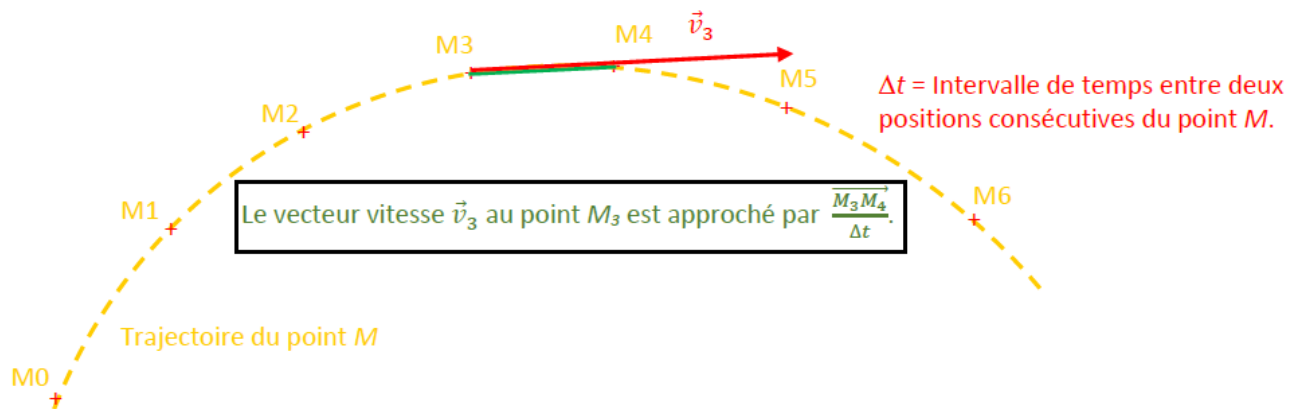
$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}(t)}{dt}$$

b) Caractéristiques du vecteur vitesse instantanée et valeur approchée

- Son **origine** est la position G à l'instant considéré
- Sa **direction** est tangente à la trajectoire en G
- Son **sens** est celui du mouvement
- Sa **valeur** approchée v_i s'exprime en m.s^{-1} : $v_i \approx \frac{G_i G_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}$



c) Rappel : tracé d'un vecteur vitesse à partir d'un enregistrement de positions



En effet, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) \\ v_y(t) \end{cases}$ à l'instant t sont définies à partir de celles du vecteur déplacement de M de coordonnées $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, entre les instants t et $t + \Delta t$;

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} \approx \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} \text{ dont les coordonnées sont } \vec{v} \begin{cases} v_x(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ v_y(t) \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

Dans cette modélisation, le tracé du vecteur vitesse \vec{v}_3 en M_3 est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_3M_4}$

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{OM_i}}{v(t_i)} = \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \approx \frac{\overrightarrow{OM_{i+1}} - \overrightarrow{OM_i}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{\Delta t}$$

d) Coordonnées du vecteur vitesse et équations horaires de la vitesse dans un repère cartésien.

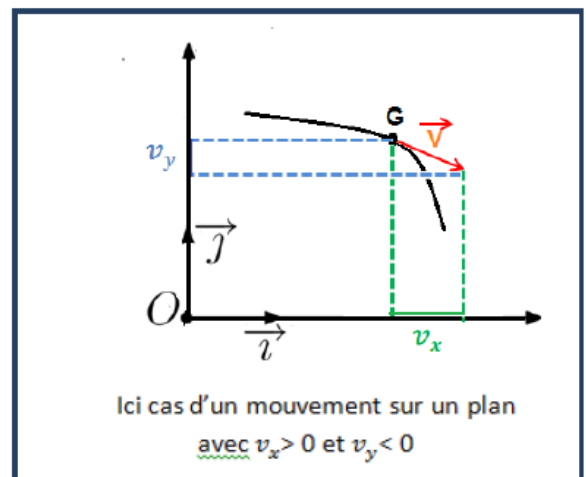
Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

v_x = projection de $\vec{v}(t)$ sur l'axe $O\vec{i}$

v_y = projection de $\vec{v}(t)$ sur l'axe $O\vec{j}$

v_z = projection de $\vec{v}(t)$ sur l'axe $O\vec{k}$



Si le vecteur vitesse varie au cours du temps, alors ses coordonnées v_x ; v_y ; v_z sont des fonctions du temps

On appelle équations horaires de la vitesse les fonctions $v_x(t)$; $v_y(t)$; $v_z(t)$

Si on connaît les équations horaires du mouvement $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ on détermine les coordonnées de la vitesse en dérivant par rapport au temps chacune des équations horaires.

$$\overrightarrow{v}(t) \begin{pmatrix} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Dérivée de } x(t) \text{ par rapport au temps} \\ \longrightarrow \text{Dérivée de } y(t) \text{ par rapport au temps} \\ \longrightarrow \text{Dérivée de } z(t) \text{ par rapport au temps} \end{array}$$

Remarque :

$$\|\vec{v}(t)\| = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Application n°2 : on donne les équations horaires du mouvement de G dans un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{pmatrix} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t^3 - 3t - 2 \\ z(t) = 5t \end{pmatrix}$$

Déterminer les équations horaires de la vitesse. En déduire les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = 2$ s.

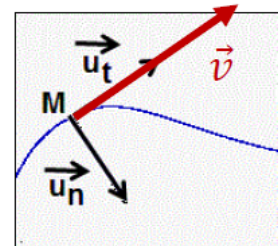
$$\overrightarrow{v}(t) \begin{pmatrix} v_x(t) = \\ v_y(t) = \\ v_z(t) = \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}(2) \begin{pmatrix} v_x(2) = \\ v_y(2) = \\ v_z(2) = \end{pmatrix}$$

En déduire la valeur de la vitesse v à $t = 2$ s

Coordonnées du vecteur vitesse dans le repère de Frenet

Le vecteur vitesse étant toujours tangent à la trajectoire, il est donc uniquement porté par le vecteur unitaire tangentiel \vec{u}_t ut de la base de Frenet. On a donc :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$$



Avec v = valeur de la vitesse au point M considéré.

La composante du vecteur vitesse portée par le vecteur unitaire normal \vec{u}_n de la base de Frenet est toujours nulle.

5) Vecteur accélération

a) Définition

Il y a **accélération** dès qu'il y a **variation de la vitesse** en **direction**, **sens** ou **valeur**, c'est-à-dire dès qu'il y a **variation du vecteur vitesse**.

Le **vecteur accélération** $\vec{a}(t)$ représente la variation du vecteur vitesse pendant un intervalle de temps très court.

Il est alors défini comme la **dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps**

La valeur de l'accélération s'exprime en **m/s²** ou **m.s⁻²**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

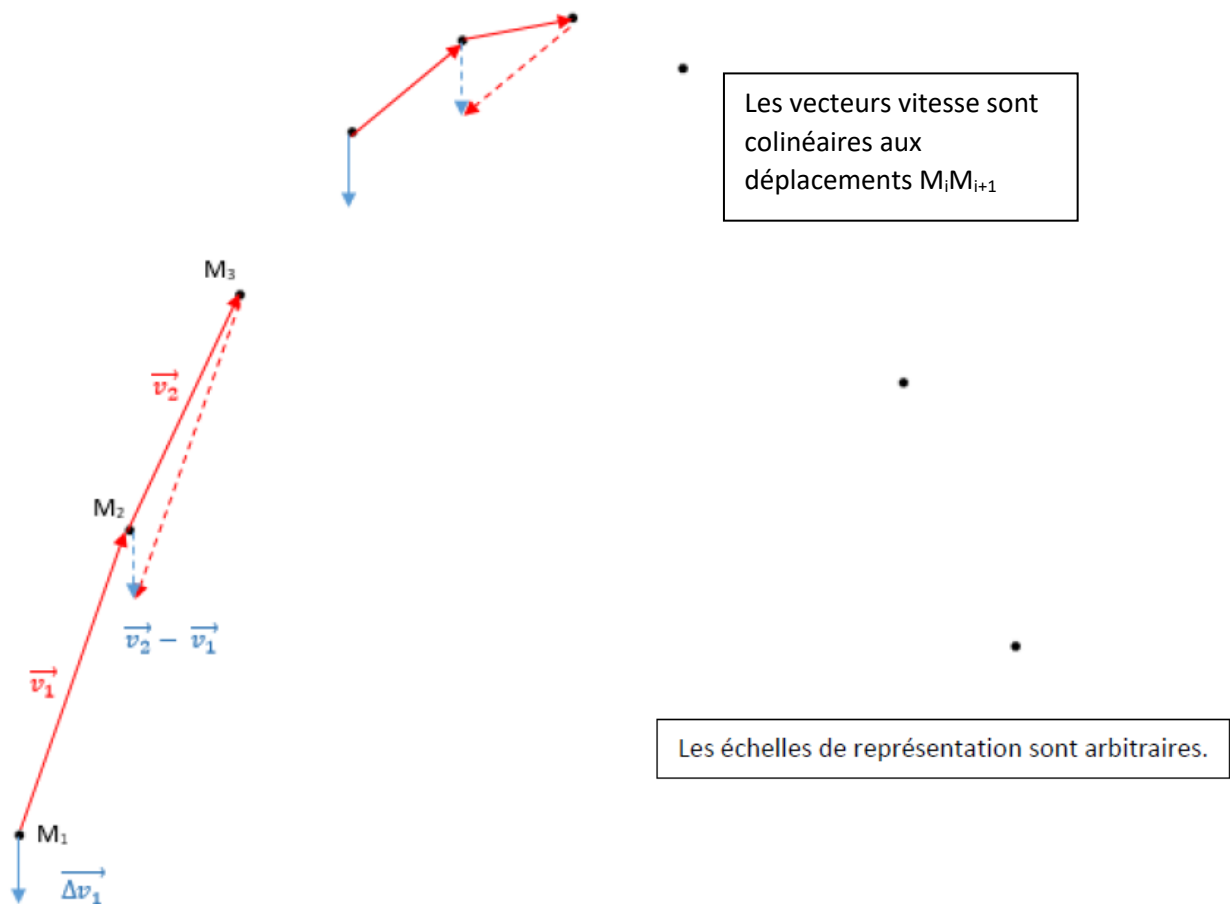
b) Tracé d'un vecteur accélération

Le vecteur accélération en un point est proportionnel au vecteur variation de vitesse en ce point.

$$\vec{a}_i = \overline{a(t_i)} = \frac{d\overline{v(t)}}{dt}(t_i) \approx \frac{\overline{v(t_i+\Delta t)} - \overline{v(t_i)}}{\Delta t}$$

Exemple du mouvement parabolique :

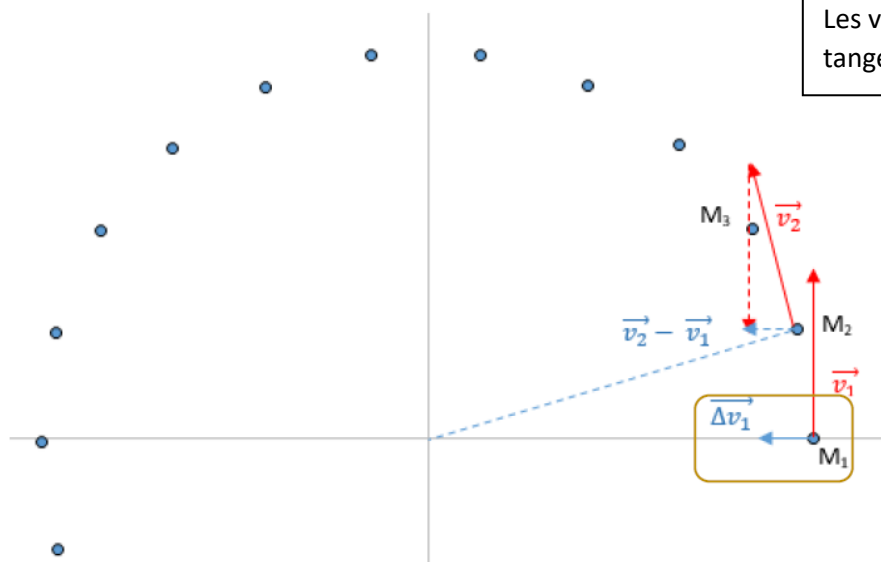
Le mouvement parabolique suivant a été simulé en utilisant les lois de la mécanique. Dans cette situation, on attend un vecteur accélération de même valeur en tout point de la trajectoire et vertical.



$$\Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Aux erreurs de construction près, la direction du vecteur accélération est sensiblement verticale. Il a aussi pratiquement la même valeur en tout point.

Exemple du mouvement circulaire uniforme



Les vecteurs vitesse sont tangent au cercle.

$$\Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

L'accélération est uniforme et centripète.

c) Coordonnées du vecteur accélération instantanée dans un repère cartésien

Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur accélération s'écrit

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

a_x = projection de \vec{a} sur l'axe $O\vec{i}$

a_y = projection de \vec{a} sur l'axe $O\vec{j}$

a_z = projection de \vec{a} sur l'axe $O\vec{k}$

Si le vecteur accélération varie au cours du temps, alors ses coordonnées a_x ; a_y ; a_z sont des fonctions du temps

On appelle équations horaires de l'accélération les fonctions $a_x(t)$; $a_y(t)$; $a_z(t)$

Si on connaît les équations horaires de la vitesse $v_x(t)$; $v_y(t)$; $v_z(t)$ on détermine les coordonnées de l'accélération en dérivant par rapport au temps chacune de ces équations horaires.

$$\vec{a}(t) \begin{pmatrix} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$\|\vec{a}(t)\| = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Application n°3 : les équations horaires d'un mouvement plan sont : $\begin{cases} x(t) = 10t^2 + 3t \\ y(t) = 5t + 6 \end{cases}$

Déterminer les équations horaires de la vitesse et de l'accélération.

Que dire de l'accélération dans ce cas ?

Application n°4 : on considère un mouvement au cours duquel l'accélération est constante et a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -10 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer les équations horaires des coordonnées du vecteur vitesse sachant qu'à $t=0$ le vecteur vitesse est :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_x(0) = 3 \\ v_y(0) = 5 \end{pmatrix}$$

b. En déduire les équations horaires de la position du point G sachant qu'à $t=0$ le point G a pour coordonnées :

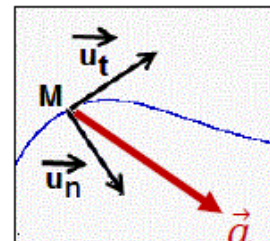
$$\vec{OG}_0 \begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 20 \end{pmatrix}$$

d) Coordonnées du vecteur accélération dans le repère de Frenet

$$\vec{a} = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n$$

Avec a_t = accélération tangentielle : $a_t = \frac{dv(t)}{dt}$

et a_n = accélération normale : $a_n = \frac{v^2}{R}$ avec R rayon de courbure de la trajectoire
avec v en $m.s^{-1}$, R en m , et a en $m.s^{-2}$



II) Etude de mouvements

1. Mouvement rectiligne uniforme

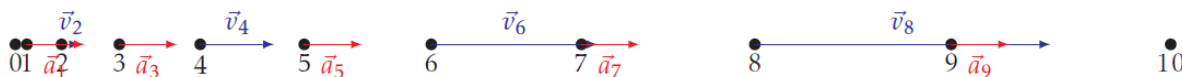
Dans un référentiel donné, un mouvement reste **rectiligne uniforme**, si sa trajectoire est une droite, son **vecteur vitesse reste constant** au cours du temps (son **accélération** est donc **nulle**).



Chronophotographie d'un mouvement rectiligne uniforme sur un axe (Ox)	Représentation graphique de la coordonnée x de la position en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x de la vitesse en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x de l'accélération en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = v_{x0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = v_{x0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = 0$

2. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

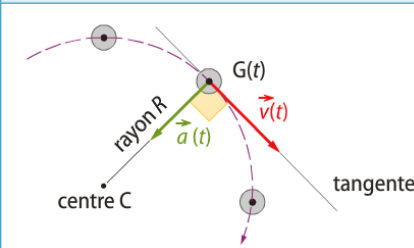
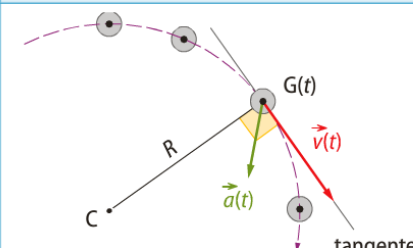
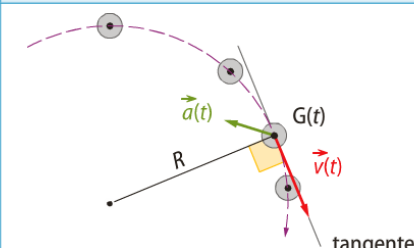
Dans un référentiel donné, un mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**, si sa trajectoire est une droite, son **vecteur accélération reste constant** au cours du temps.



Chronophotographie du mouvement	Représentation graphique de la coordonnée x en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{x0} \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = a_{x0} \cdot t + v_{x0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = a_{x0}$

3. Mouvement circulaire

[Rappel] un mouvement est **circulaire** si la trajectoire du solide est un **cercle**.

Mouvement circulaire uniforme	Mouvement circulaire uniformément accéléré	Mouvement circulaire uniformément ralenti
		
<p>Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ varie mais sa valeur v reste constante.</p> <p>Le vecteur accélération \vec{a} est dirigé vers le centre de la trajectoire.</p> <p>$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.</p>	<p>Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{constante}$. Il est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.</p> <p>La valeur de la vitesse v augmente. $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$.</p>	<p>La valeur de la vitesse v diminue. $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.</p>

Repère de Frenet

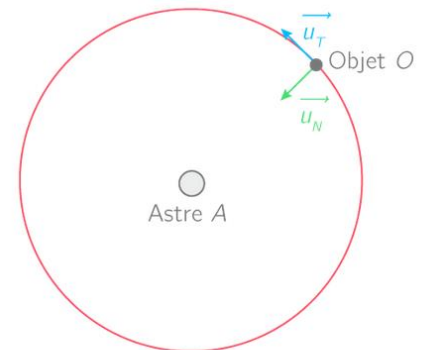
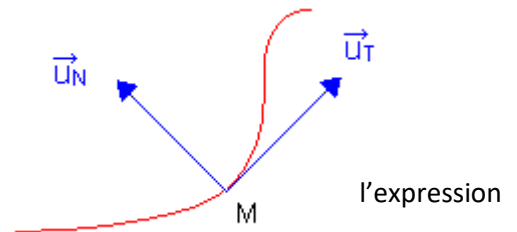
Pour étudier un mouvement circulaire, on utilise un repère mobile

$$(O, \vec{u}_N, \vec{u}_T)$$

appelé repère de Frenet qui permet de simplifier des composantes de l'accélération.

Cette base est constituée de deux vecteurs \vec{u}_T et \vec{u}_N .

- Le vecteur **unitaire** \vec{u}_T est **tangent** à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile. Ce vecteur est orienté arbitrairement (pas nécessairement dans le sens du mouvement).
- Le vecteur **unitaire** \vec{u}_N est **normal** à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.



Repère mobile (ou repère de Frenet)

- Cas du mouvement circulaire non uniforme :

Dans le cas d'un mouvement circulaire, à chaque instant, l'accélération peut se décomposer en deux vecteurs :

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

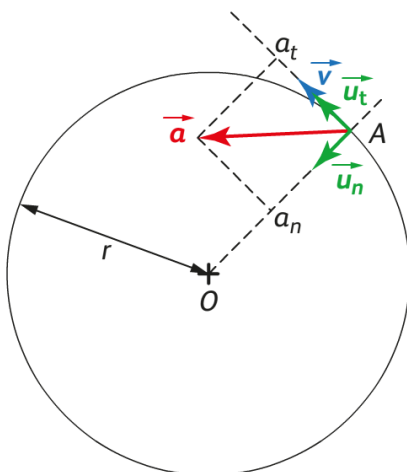
- \vec{a}_n : accélération normale, centripète ;
- \vec{a}_τ : accélération tangentielle, tangente à la trajectoire et orientée dans le sens du mouvement.

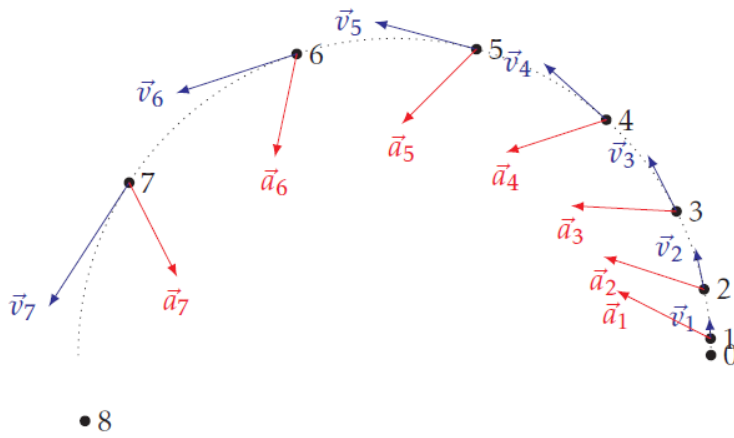
Dans le repère local (A ; \vec{u}_n , \vec{u}_τ), est appelé **repère de Frenet**, on montre que les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération sont :

$$\vec{v} \begin{cases} v_n = 0 \\ v_\tau = v \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} \\ a_\tau = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

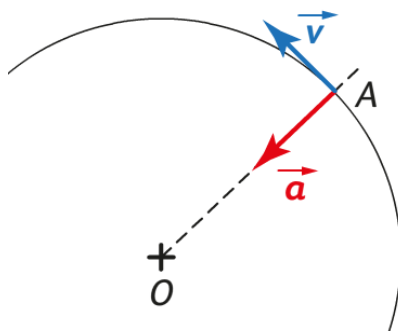
(r = rayon de la trajectoire, en m)





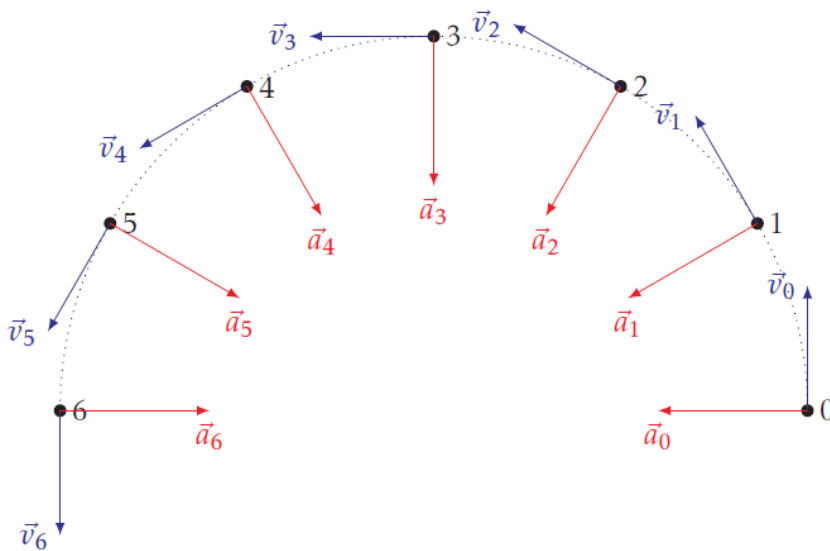
Le vecteur vitesse
varie (direction et
valeur),
**il y a donc
vraiment
accélération !**

- Cas du mouvement circulaire uniforme (MCU) :



Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, la vitesse est constante donc $\frac{dv}{dt} = 0$ et $a_\tau = 0$ donc :

$$a = a_n = \frac{v^2}{R}$$



Le vecteur vitesse
varie (sa direction),
**il y a donc
accélération !**

Annexe mathématique

Intérêt de la notation différentielle $\frac{df(x)}{dx}$

Soit la fonction $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$

Sa dérivée est $f'(x) = 6x + 2$

On pourrait noter la dérivée $\frac{df(x)}{dx} = 6x + 2$.

Dans ce cas, la notation $f'(x)$ ou $\frac{df(x)}{dx}$ sont équivalentes car il n'y a qu'une seule variable x .

- En revanche, en mécanique, il y a 4 variables : trois d'espace (x, y, z) et une temporelle t .

Pour repérer une position, on a donc des fonctions de plusieurs variables.

Soit $f(x, y) = 3x^2 + 4y - 5$

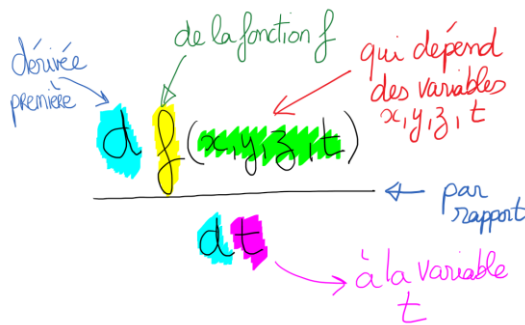
Si on demande la dérivée de cette fonction $f'(x, y)$, on ne peut pas répondre car on ne connaît pas la variable. Est-ce x ou y ? On ne sait pas par rapport à qui dériver.

La notation différentielle prend alors tout son sens, car on sait qui joue le rôle de variable.

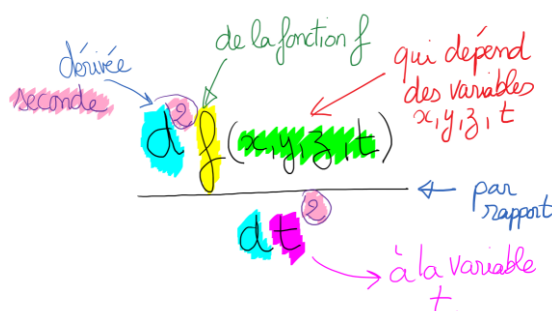
- Si x est la variable, on note la dérivée ainsi : $\frac{df(x, y)}{dx} = 6x$ (y est considérée comme une constante)
- Si y est la variable, on note la dérivée ainsi : $\frac{df(x, y)}{dy} = 4$ (x est considérée comme une constante).

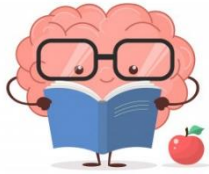
Pour les fonctions à plusieurs variables, on comprend donc l'intérêt de la notation différentielle

- Pour une dérivée première (on dérive une fois la fonction f), voici ce que signifie la notation $\frac{df(x, y, z, t)}{dt}$



- Pour une dérivée seconde (on dérive deux fois la fonction f), voici ce que signifie la notation $\frac{d^2 f(x, y, z, t)}{dt^2}$

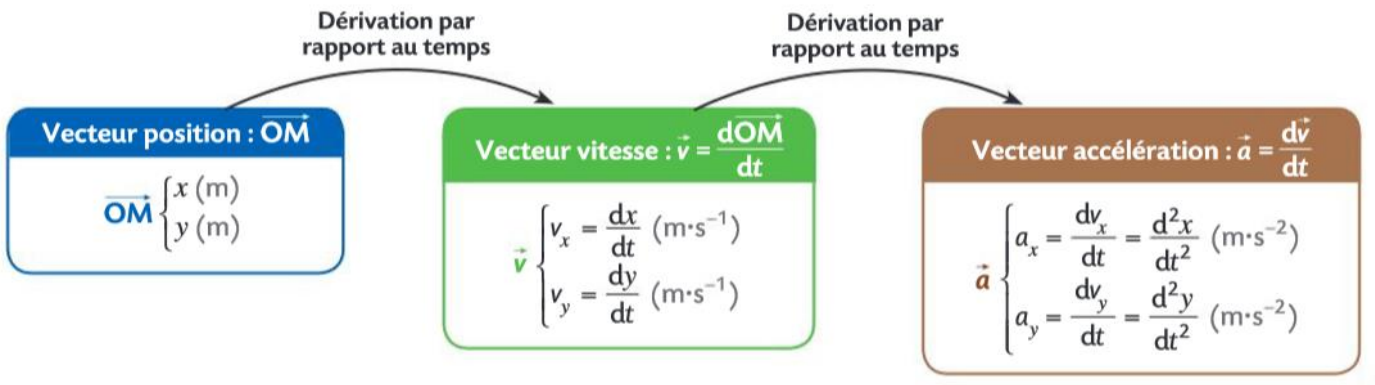




FICHE RÉSUMÉ

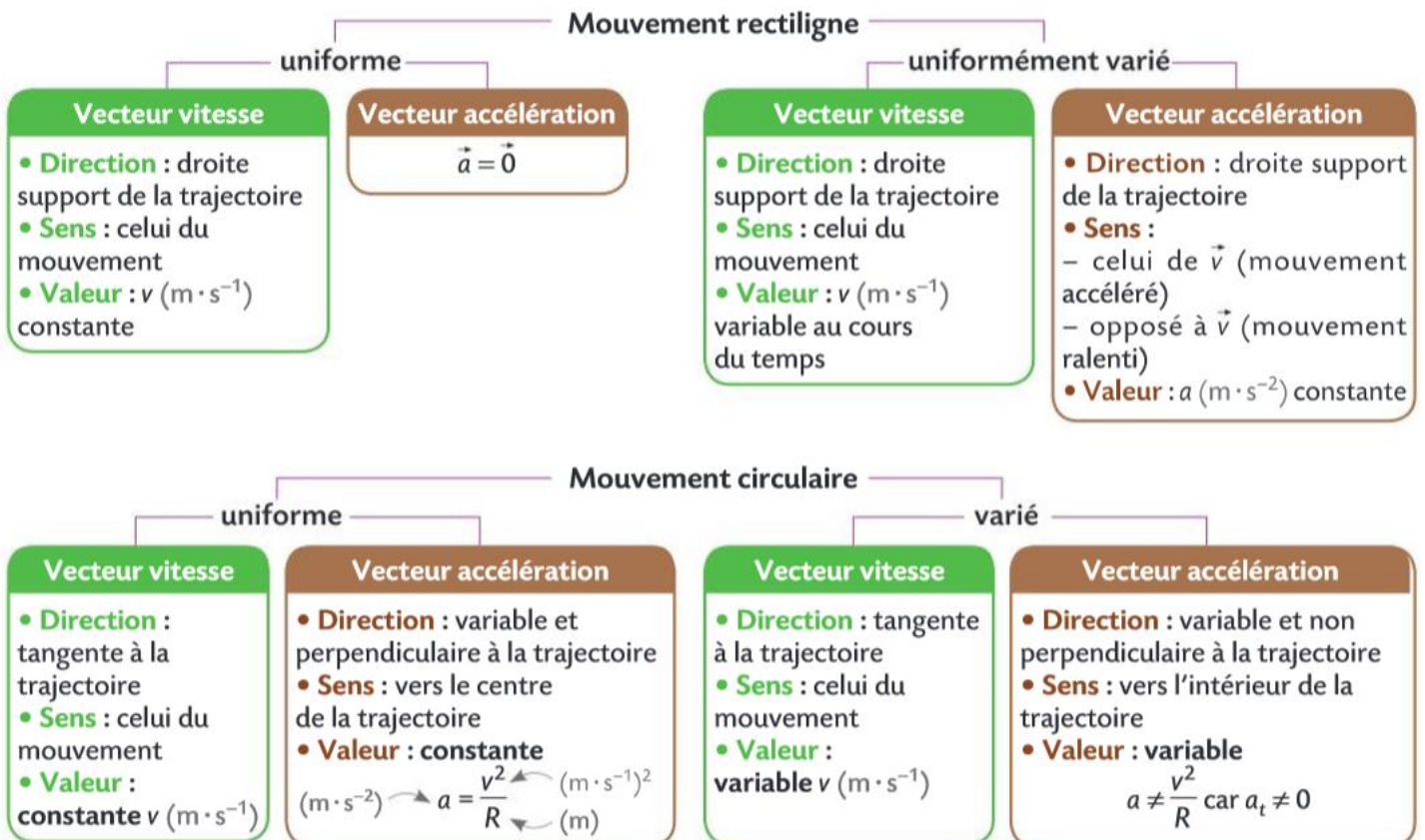
1) Vecteurs position, vitesse et accélération

Dans un référentiel donné, associé à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour un point M d'un système, à toute date t :



2) Des exemples de mouvements

Dans un référentiel donné, les vecteurs \vec{v} et \vec{a} permettent de décrire un mouvement



uniforme

Vecteur vitesse

- **Direction** : tangente à la trajectoire
- **Sens** : celui du mouvement
- **Valeur** : constante $v \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1})$

Vecteur accélération

- **Direction** : variable et perpendiculaire à la trajectoire
- **Sens** : vers le centre de la trajectoire
- **Valeur** : constante $a = \frac{v^2}{R} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2})$

varié

Vecteur vitesse

- **Direction** : tangente à la trajectoire
- **Sens** : celui du mouvement
- **Valeur** : variable $v \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1})$

Vecteur accélération

- **Direction** : variable et non perpendiculaire à la trajectoire
- **Sens** : vers l'intérieur de la trajectoire
- **Valeur** : variable $a \neq \frac{v^2}{R}$ car $a_t \neq 0$