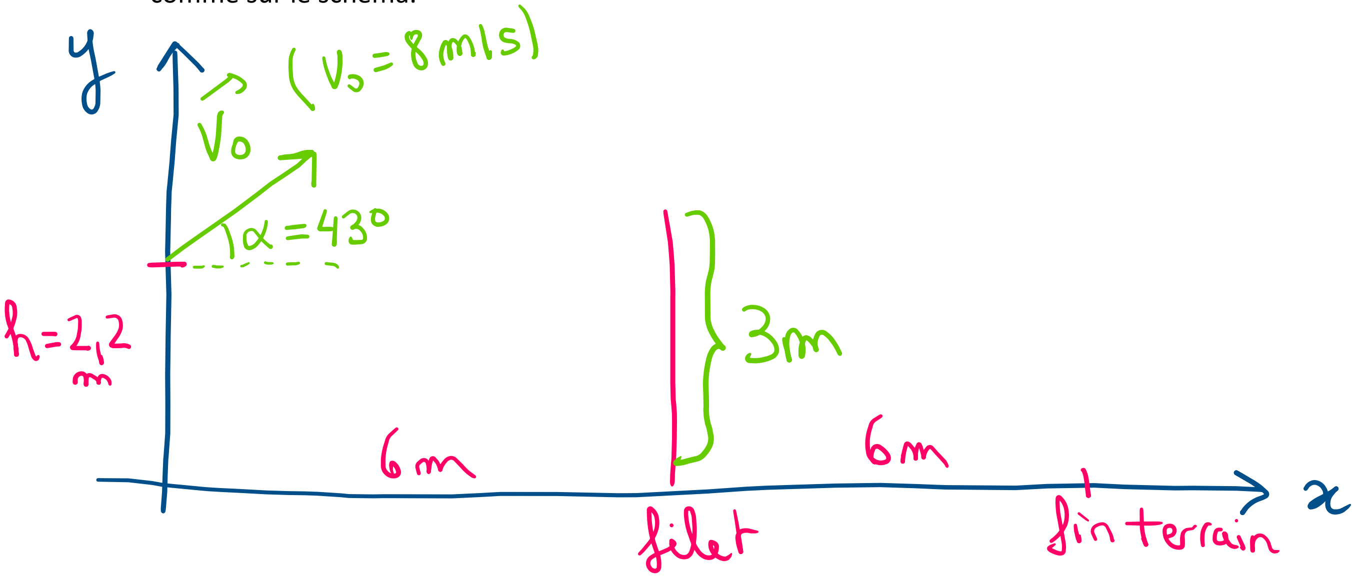
Exercice : Soutien

Un joueur amateur décide de faire un service au volley ball dans son jardin avec un terrain improvisé comme sur le schéma.



1) Etablir les équations horaires du mouvement ainsi que celle de la trajectoire.
2) Sans filet, la balle peut-elle marquer ?
3) La balle passe-t-elle le filet ou est-elle bloquée par celui-ci ?
4) Calculer les coordonnées de l'altitude maximale de la balle.

1) Système : la balle
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Bilan des forces : poids $\vec{P}$ uniquement
c'est une chute libre

2e loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} = m\vec{a} \iff m\vec{g} = m\vec{a} \iff \vec{a} = \vec{g}$

$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$ équations horaires de l'accélération

NB : $a = cte \Rightarrow$ mvt uniformément accéléré

Or $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 = \dfrac{dV_x}{dt} \xrightarrow{\text{PRIM}} V_x(t) = cte_1 \\ a_y = -g = \dfrac{dV_y}{dt} \xrightarrow{\text{PRIM}} V_y(t) = -gt + cte_2 \end{cases}$$

Trouvons les cte_1 et cte_2 avec les conditions initiales sur la vitesse.

A $t = 0$, $\begin{cases} V_x(0) = V_0 \cos\alpha = cte_1 \\ V_y(0) = V_0 \sin\alpha = -g \times 0 + cte_2 \end{cases}$

Donc $\vec{V} \begin{pmatrix} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$ équations horaires de la vitesse

Or $\vec{V} = \dfrac{d\vec{OG}}{dt}$ ($\vec{OG}$ vecteur position)

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha = \dfrac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{PRIM}} x = V_0 \cos\alpha \, t + cte_3 \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha = \dfrac{dy}{dt} \xrightarrow{\text{PRIM}} y = -\dfrac{gt^2}{2} + V_0 \sin\alpha \, t + cte_4 \end{cases}$$

Trouvons les cte avec les conditions initiales sur la position.

A $t=0$, $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=h \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0)=0=V_0\cos\alpha \times 0+cte_3 \\ y(0)=h=-g\times\frac{0^2}{2}+V_0\sin\alpha\times 0+cte_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad cte_3=0 \quad \text{et} \quad cte_4=h$$

DONC $\vec{OG}\begin{pmatrix} x=V_0\cos\alpha\, t \\ y=-g\frac{t^2}{2}+V_0\sin\alpha\, t+h \end{pmatrix}$

équations horaires de la position

* Trajectoire : on exprime $y=f(x)$

$x=V_0\cos\alpha\, t \Rightarrow t=\frac{x}{V_0\cos\alpha}$ que l'on injecte dans $y(t)$.

$$\Rightarrow \quad y=-\frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2+V_0\sin\alpha\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)+h$$

$$y=-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha\, x+h$$

$$y=\frac{-9{,}81}{2\times 8^2\times\cos(43)^2}x^2+\tan 43\times x+2{,}2$$

$y = -0{,}14x^2 + 0{,}93x + 2{,}2$

équation de la trajectoire

(mvt parabolique)

2) On veut connaitre la portée de la balle

On résout $y(x) = 0$

$\Longrightarrow -0{,}14x^2 + 0{,}93x + 2{,}2 = 0$

$\Delta = 0{,}93^2 - 4 \times (-0{,}14) \times 2{,}2$

$\Delta = 2{,}1$

$x_1 = \dfrac{-0{,}93 + \sqrt{2{,}1}}{2 \times (-0{,}14)} = -1{,}85 < 0$ aucun sens

$x_2 = \dfrac{-0{,}93 - \sqrt{2{,}1}}{2 \times (-0{,}14)} = \underline{8{,}5\,m}$

Donc la balle est située à 8,5m du joueur, elle est encore dans le terrain ($8{,}5 < 12$).

3) La balle touche-t-elle le filet

On sait que le filet est en $x = 6$.
On calcule donc son altitude soit $y(6)$
pour voir si elle est au dessus de 3 m
(hauteur du filet).

$$y(6) = -0{,}14 \times 6^2 + 0{,}93 \times 6 + 2{,}2$$

$$= 2{,}74\,\text{m} < \underbrace{3\,\text{m}}_{\text{hauteur filet}}$$

$\Longrightarrow$ la balle est arrêtée par le filet.

4) A l'altitude maximale, la vitesse

$$\underbrace{V_y(t)}_{-g \times t_s + V_0 \sin\alpha} = 0.$$

$$-g \times t_s + V_0 \sin\alpha = 0 \Longrightarrow t_s = \frac{+V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$t_s = \frac{+8 \times \sin 43}{9{,}81}$$

$$t_s = 0{,}56\ \text{s}$$

On calcule alors $x(t_s)$ et $y(t_s)$.

$$x_s(0{,}56) = V_0 \cos\alpha \, t_s$$
$$= 8 \times \cos(43) \times 0{,}56$$
$$= 3{,}27 \text{ m}.$$

$$y_s(0{,}56) = -g \times \frac{t_s^2}{2} + V_0 \sin\alpha \, t_s + h$$
$$= -9{,}81 \times \frac{0{,}56^2}{2} + 8 \times \sin(43) \times 0{,}56 + 2{,}2$$
$$= 3{,}72 \text{ m}.$$

Donc le sommet est à

$$\begin{cases} x_s = 3{,}27 \text{ m} \\ y_s = 3{,}72 \text{ m} \end{cases}$$