TP SUIVRE ET MODELISER L'EVOLUTION DE LA TEMPERATURE D'UN SYSTEME INCOMPRESSIBLE

Un élève se prépare une boisson chaude au petit déjeuner quand il est interrompu par un appel téléphonique. Quand il raccroche 15 minutes plus tard, sa boisson a déjà refroidi.

Quelle est la loi d'évolution de la température de la boisson initialement chaude ?

Transfert de chaleur par un fluide

Lorsqu'un système échange de la chaleur avec l'extérieur par l'intermédiaire d'un fluide en mouvement, on parle de **conducto-convection**.
Pendant une durée infinitésimale dt, la chaleur échangée par le système δQ (infinitésimale également, on parle de transfert élémentaire) est donnée par :

S : surface d'échange — T : température du système

$$\delta Q = h \times S \times (T_{ext} - T) \times dt$$

h : coefficient d'échange conducto-convectif — T_{ext} : température de la pièce (supposée constante)

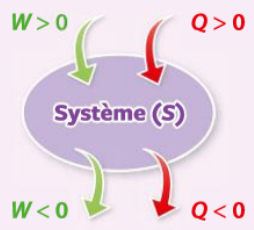
Variation d'énergie interne

La variation élémentaire d'énergie interne dU pour un système fermé s'exprime pour une phase condensée $dU = CdT$, avec C capacité thermique du système.

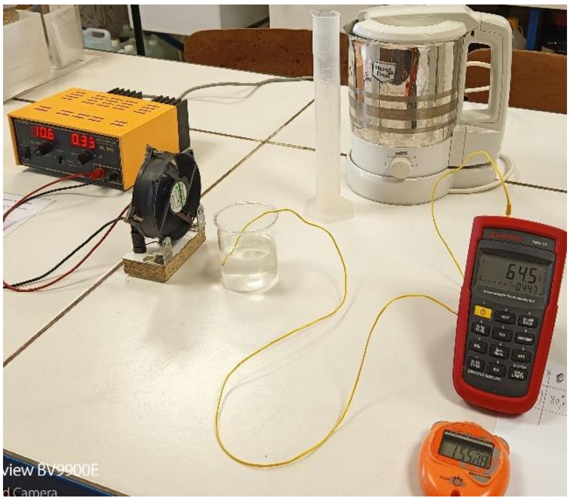
Convention de signes en thermodynamique

Ces termes d'échange sont des grandeurs algébriques (exprimées en joules) :

- **Positives** si l'énergie est effectivement **reçue** par le système
- **Négatives** si l'énergie est effectivement **fournie** au milieu extérieur par le système



t	T
s	°C
0	82,6
10	80,1
20	77,5
30	75,7
40	72,8
50	70,4
60	68,1
70	66
80	64,2
90	61,9
100	60,7
110	59,1
120	57,7
140	54,9
150	53,6
160	52,1
170	51,3
180	50,2
210	47,6
240	45
270	42,8
300	40,8
360	37,3
420	34,4
480	32,1
540	30,1
600	28,5
660	27,1
720	26
780	25
840	24



Protocole :

1) Chauffer l'eau à environ 80°C. Ce sera la température initiale Ti.
2) Placer une quantité d'eau de volume V=100 mL dans un bécher.
3) Placer dans le bécher une sonde de température et relever la valeur toutes les 10s pendant 2 minutes puis toutes les 30s pendant 3 minutes supplémentaires puis toutes les minutes pendant les 15 minutes suivantes.
4) Rentrer les valeurs au fur et à mesure dans Régressi ou sur Spyder. Enregistrer vos mesures dans votre dossier « loi de refroidissement de Newton ».

Ci-contre, il y a un exemple de résultats expérimentaux.

Démarche expérimentale :

1) Indiquer le signe du transfert thermique Q de l'expérience réalisée. Etablir l'unité de h.

$$h = \frac{\delta Q \rightarrow J}{\underbrace{S}_{m^2}\underbrace{(T_{ext} - T)}_{K \text{ ou } °C}\underbrace{dt}_{s}}$$

donc $[h] = J\,m^{-2}\,K^{-1}\,s^{-1}$

ou $J\,m^{-2}\,°C^{-1}\,s^{-1}$

2) Montrer que d'après le premier principe de la thermodynamique, l'équation différentielle vérifiée par la température est :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{h \times S}{C} \times T + \frac{h \times S}{m} \times T_{ext}$$

1^{er} principe $\Delta U = W + Q = Q$

$W = 0$ car pas de travail autre que les échanges thermiques.

$\underbrace{\Delta U} = Q$

$C(T(t+\Delta t) - T(t)) = Q$

$C \dfrac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \dfrac{Q}{\Delta t}$

Si $\Delta t \to 0$ alors il reste

$C \dfrac{dT(t)}{dt} = \dfrac{Q}{\Delta t}$

$\downarrow$ d'après le doc 1

$C \dfrac{dT(t)}{dt} = hS(T_{ext} - T(t))$

$\underbrace{\dfrac{dT(t)}{dt}}_{y'} + \underbrace{\dfrac{hS}{C}}_{a} \underbrace{T(t)}_{y} = \underbrace{\dfrac{hS}{C} T_{ext}}_{b}$

$y' + a\,y = b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Equa diff linéaire d'ordre 1 à coef constants avec second membre constant (b)

3) Résoudre cette équation différentielle.

Solution $y(t) = A e^{-at}$ + sol particulière obtenue qd $t \to +\infty$

Si $t \to +\infty$, il reste dans l'équa diff

$\underbrace{\dfrac{dT(t)}{dt}}_{\downarrow\, 0 \text{ car } T = cte} + \dfrac{hS}{C} T_{parti}(t) = \dfrac{hS}{C} T_{ext}$

$\Rightarrow T_{parti}(t) = T_{ext}$

Donc $T(t) = A\, e^{-\frac{hS}{c}t} + T_{ext}$

Trouvons A avec les conditions initiales

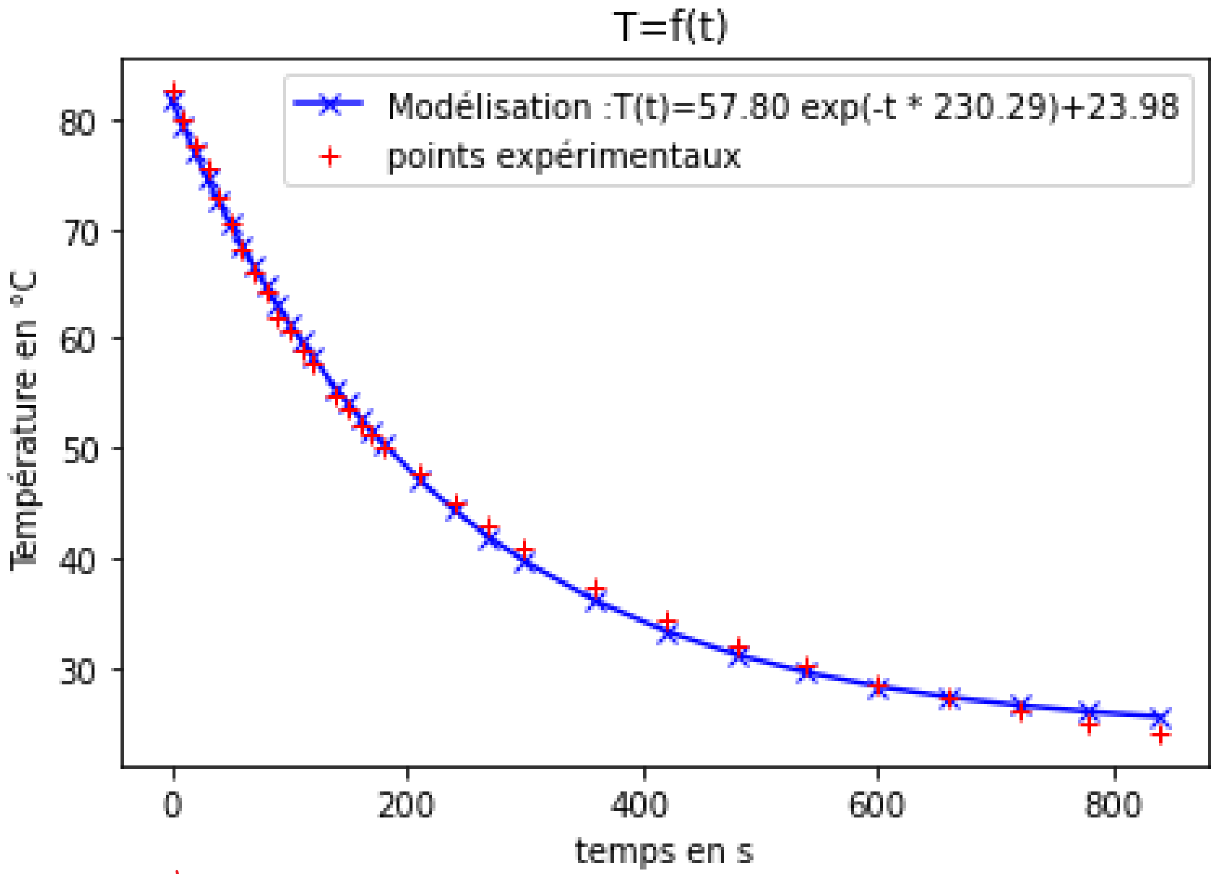
$T(0) = T_0 = 82{,}6°C$

$\Rightarrow T(0) = A e^{-\frac{hS}{c}\times 0} + T_{ext} = A + T_{ext} = T_0$

$\Rightarrow \boxed{A = T_0 - T_{ext}}$

Finalement : $\boxed{T(t) = (T_0 - T_{ext})\, e^{-\frac{hS}{c}t} + T_{ext}}$

4) Modéliser la courbe T=f(t) et vérifier que la loi mathématique donnant l'évolution de la température mesurée au cours du temps correspond à la solution proposée à la question précédente. Coller ici la courbe obtenue.



La modélisation est cohérente avec les points expérimentaux.

5) A l'aide la modélisation, trouver la valeur du coefficient d'échange conducto-convectif h.

Donnée : c_{eau}=4180 $J.kg^{-1}.K^{-1}$

D'après la modélisation, $\frac{hS}{C} = 230{,}29$

$\Rightarrow h = \frac{230{,}29 \times C}{S} = \frac{230{,}29 \times 4180}{}$

Pour aller plus loin

6) Proposer un protocole expérimental permettant de montrer que la valeur de la section au contact de l'atmosphère joue un rôle important.

On refait la même expérience avec un becher plus étroit ou plus large.

Annexe : programme Python de modélisation

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.optimize import curve_fit


t =
np.array([0,10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120,140,150,160,170,180,210,240,270,300,360,420,480,540,600,660,720,780,840])

T = np.array(

[82.6,80.1,77.5,75.7,72.8,70.4,68.1,66,64.2,61.9,60.7,59.1,57.7,54.9,53.6,52.1,51.3,50.2,47.6,45,42.8,40.8,37.3,34.4,32.1,30.1,28.5,27.1,26,25,24]

)


######Modelisation avec la fonction exponentielle ######

def fonction(x, a, b, c):

    return a * np.exp(-x / b) + c


# bounds permet de contraindre les paramètres en donnant un min et un max pour chacun

params, covar = curve_fit(fonction, t, T, bounds=([57,229,23],[58,231,25]))


#Affichage des valeurs numériques de a, b et c
```

```
#print("a = %s , b = %s, c = %s" % (params[0], params[1], params[2]) )


print("a = {0} , b = {1}, c = {2}".format(*params))


#modele = [fonction(val, *params) for val in t]
"""
modele = []
for val in t:
    modele.append(fonction(val, *params))
"""
plt.plot(t,fonction(t, *params),'x-',c='b',
        label="Modélisation :T(t)={0:.2f} exp(-t * {1:.2f})+{2:.2f}".format(*params)
       )


plt.plot(t,T,'+',c='r',label="points expérimentaux")
plt.xlabel("temps en s")
plt.ylabel("Température en °C ")
plt.title(" T=f(t)")
plt.legend()
plt.show()
```