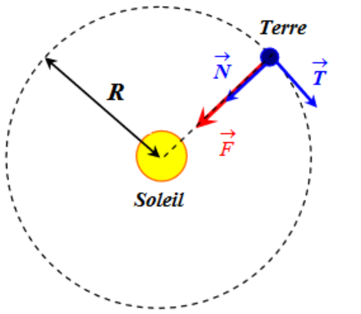
# Chapitre 7 : mécanique céleste et satellites

Le mouvement d'un objet en orbite autour d'un astre est toujours une ellipse. Dans tous les cas que nous aborderont cette année, l'ellipse sera un cercle ou s'en approchera fortement, comme par exemple pour l'orbite de la Terre dans le référentielle héliocentrique.

## 1. Mouvement des planètes et des satellites

Pour étudier le mouvement d'une planète (ou d'un satellite), de masse m, autour du Soleil (par exemple), de masse $M_S$, on se place dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen. On prend un repère de Frenet.

Orbite de la Terre autour du SOLEIL




**Rappel : accélération dans le repère de Frenet (voir chapitre 5)**

**Définition :**

**L'accélération dans la base de Frenet s'écrit :** $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}}$

**Avec** $\boxed{a_N = \dfrac{v^2}{R}}$ **et** $\boxed{a_T = \dfrac{dv}{dt}}$

### a) Accélération

- **Système étudié** : Terre de masse $M_T$
- **Référentiel d'étude** : héliocentrique supposé galiléen
- **Inventaire des forces extérieures** :Une seule force, la **force d'interaction gravitationnelle** $\vec{F}$ exercée par le Soleil sur la Terre.

Comme la masse de la Terre est constante, d'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} = M_T \cdot \vec{a}$$

Or la force de gravité exercée par le Soleil de masse $M_S$ sur la Terre a pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N}}$$

$F$ en $N$
$M$ en $kg$
$R$ en $m$
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

**G = constante de gravitation universelle**

D'où : $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N} = M_T \left(a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2}} \vec{N} = \boxed{M_T a_N} \vec{N} + \boxed{M_T a_T} \cdot \vec{T}$$

Donc, **par identification** : $\begin{cases} M_T a_N = G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \\ M_T a_T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_N = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2} \\ a_T = 0 \end{cases}$

Or si $a_T = 0$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$ car **par définition** $a_T = \frac{dv}{dt}$

Et si $\frac{dv}{dt} = 0$ cela implique que $v = \|\vec{v}\| = cste.$

**Ainsi, si la trajectoire d'un objet en orbite gravitationnelle est circulaire alors son mouvement est uniforme.**

Par exemple :

- La Terre ayant une orbite quasi-circulaire, sa vitesse reste toujours voisine de 30 *km/s*
- La comète de Halley ayant une orbite très elliptique, sa vitesse varie énormément (de 1 à 55 *km/s*)

## b) Vitesse

D'après la partie précédente on a trouvé que : $a_N = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$

Or, **par définition** : $a_N = \frac{v^2}{R}$

D'où : $\frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$ ⇔ $\boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}}}$

$v$ en $m/s$
$M_S$ en $kg$
$R$ en $m$
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

## c) Période de révolution

La période de révolution $T$ est le temps nécessaire à l'objet (ici la Terre) pour faire un tour sur son orbite.
La longueur $L$ d'une orbite est égale au périmètre du cercle, soit : $L = 2\pi R$

D'où : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{L}{T} = \frac{2\pi R}{T}$

En utilisant l'expression du III.2 :

$\sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T}$ ⇔ $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}}$

## d) Satellite géostationnaire

Pour être géostationnaire, un satellite doit, dans le référentiel géocentrique, satisfaire à plusieurs conditions :

- il doit décrire un cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles. Ce plan est nécessairement celui qui contient l'équateur terrestre ;
- le sens du mouvement doit être le même que celui de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles ;
- la période de révolution doit être égale à la période de rotation propre de la Terre :

**T = 1 jour sidéral = 23 h 56 min = 86160 s**

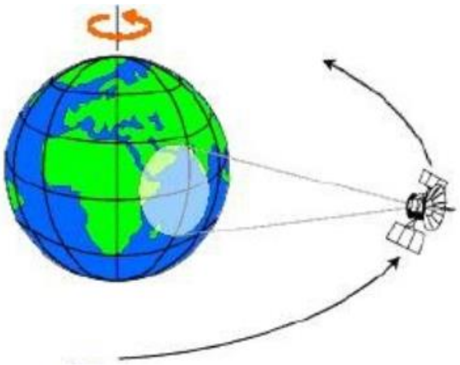
- **Altitude d'un satellite géostationnaire :**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \times M_T}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{G \times M_T \times T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

A.N. : h = 3,58 × $10^4$ km ≈ **36 000 km**

- **Vitesse d'un satellite géostationnaire :**

$$v = \sqrt{G \times \frac{M_T}{(R_T + h)^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{6,37 \times 10^6 + 3,58 \times 10^7}}$$ = 3,08 × $10^3$ m.s$^{-1}$ = **11088 km.h$^{-1}$**

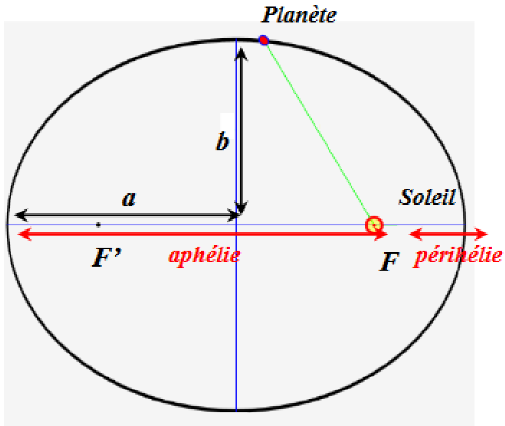


## II) Les lois de Kepler

**Première loi de Kepler** (ou loi des orbites)

**Dans un référentiel héliocentrique, la trajectoire d'une planète est une ellipse (ci-contre) et le centre du Soleil occupe un des foyers** (F ou F'). L'orbite de la planète est elliptique.

MF + MF' = 2a

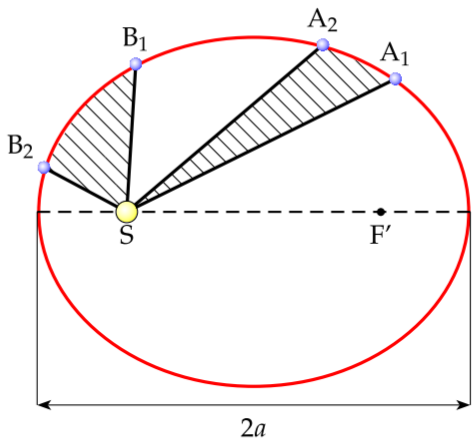



**a** est le demi-grand axe et **b** est le demi-petit axe

**Deuxième loi de Kepler (ou loi des aires)**

**Le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales.**

*Cette loi implique **que plus la planète s'approche du Soleil plus sa vitesse augmente. De même, plus elle s'en éloigne, plus sa vitesse diminue**.*




**Troisième loi de Kepler (ou loi des périodes)**

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}} \quad \begin{cases} T = \text{période de révolution de la planète (en s)} \\ a = \text{demi-grand axe de son orbite elliptique (en m)} \end{cases}$$

Remarques :

- La constante de la troisième loi de Kepler ne dépend que de l'astre attracteur :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_{astre}} \qquad \begin{cases} G = 6,67 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2} \\ M_{astre} = \text{masse de l'astre attracteur (en kg)} \end{cases}$$

- Dans le cas où l'on considère que les trajectoires des planètes et des satellites sont des cercles, on peut déterminer leurs périodes de révolution T en remplaçant, dans la troisième loi de Kepler, le demi-grand axe a de l'ellipse par le rayon R de l'orbite circulaire :

D'après le 1)c, on a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM_S}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$$

Ainsi, quelque soit la planète *P* de période de révolution *T* en orbite autour du Soleil à une distance *R*, le rapport du carré de sa période sur le cube du rayon de son orbite ne dépend que de la masse du Soleil ( plus généralement de l'astre attracteur).

$$\text{Ainsi : } \frac{{T_{Terre}}^2}{{R_{Terre}}^3} = \frac{{T_{Mars}}^2}{{R_{Mars}}^3} = \frac{{T_{Halley}}^2}{{a_{Halley}}^3} = \ldots = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Remarque :

Les lois de Kepler, bien qu'écrites pour les planètes de notre système solaire, s'applique pour tout corps en orbite elliptique autour d'un astre.

$$\text{Ainsi : } \frac{{T_{Lune}}^2}{{R_{Lune}}^3} = \frac{{T_{Satellite}}^2}{{R_{Satellite}}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Terre}}$$