Chapitre 18 : Modélisation de l'écoulement d'un fluide

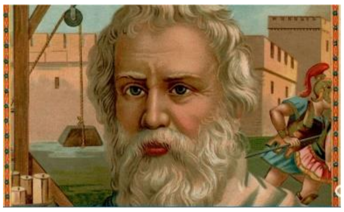
Après avoir découvert la loi fondamentale de la statique des fluides en première, l'objectif de ce chapitre est de modéliser le comportement d'un fluide à l'aide de la mécanique. Outre la très célèbre Poussée d'Archimède, nous évoquerons la loi de Bernoulli et l'effet Venturi pour décrire du mieux possible l'écoulement d'un fluide.

I – La poussée d'Archimède

Vidéo 1 : La poussée d'Archimède
https://www.youtube.com/watch?v=C-j3Dbfs_H4
https://www.youtube.com/watch?v=UD9xrA_mqGA

Vidéo 2 : Pourquoi un bateau flotte ? https://www.youtube.com/watch?v=wrV09tdQf70. (Université de Lille I)

1) Place dans l'histoire des Sciences

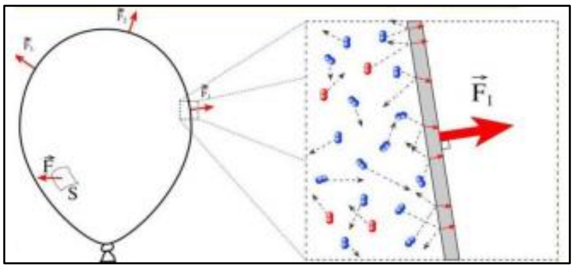


Selon la légende, le savant grec Archimède était dans son bain quand il comprit la loi qui porte maintenant son nom. Il serait sorti, nu, dans la rue et aurait crié Eurêka ! (« J'ai trouvé ! » en grec). En effet, le roi Hiéron II lui avait demandé de prouver que son bijoutier l'avait trompé sur la nature de sa couronne, mais ceci sans abimer le bijou. Archimède put prouver la supercherie en mesurant la différence de poids apparent dans l'eau entre la couronne et un lingot d'or de même masse ! C'est dans le « traité des corps flottants » publié vers 250 avant JC qu'Archimède énonça ses théories, et créa la discipline de l'hydrostatique. Ce grand mathématicien a aussi notamment donné un encadrement de Pi.

2) Rappels: force pressante et loi de la statique des fluides

a) Force pressante

Lorsqu'un fluide est en contact avec un solide, les molécules en mouvement qui constituent le fluide percutent la paroi du solide, provoquant ainsi une force pressante perpendiculaire à la paroi. Les forces pressantes étant réparties sur la paroi, l'effet de ces forces dépend de la surface S de cette paroi. La pression P peut être définie comme l'intensité de la force pressante F par unité de surface :



$$\boxed{P = \frac{F}{S}}$$

Avec P, pression en pascals (Pa), F, force en newtons (N) et S, surface en m².

La pression atmosphérique P_{atm} moyenne au niveau de la mer est de $1{,}013 \times 10^5$ Pa = 1013 hPa.
Une autre unité de pression est utilisée, le bar : 1bar = 1×10^5 Pa.

La pression d'un fluide se mesure avec un manomètre et la pression atmosphérique se mesure avec un baromètre.

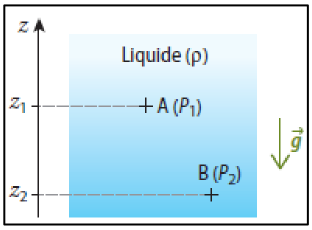
Manomètre

baromètre

b) Loi de la statique des fluides

Dans un fluide incompressible au repos de masse volumique ρ uniforme et constante, soumis au champ de pesanteur $\vec{g}$ vertical dirigé vers le bas, la pression dépend de l'altitude z. Elle est notée P(z).

La loi fondamentale de la statique des fluides incompressibles donne la relation entre les altitudes z_1 et z_2 de deux points distincts A et B et les pressions P_1 et P_2 du fluide en ces deux points :



$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho \times g \times (z_1 - z_2)}$$

Avec les pressions en Pa, la masse volumique ρ en kg·m^3, g en N·kg^{-1} et les altitudes en m.

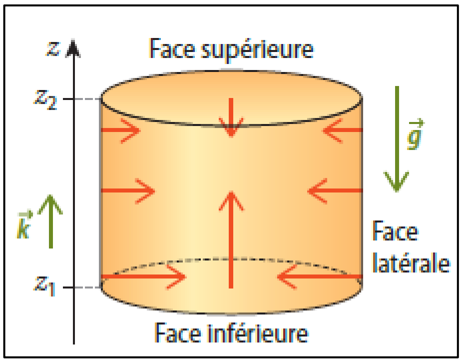
3) Origine de la poussée d'Archimède

On considère un solide entièrement immergé dans un fluide de masse volumique ρ uniforme et constante dans le champ de pesanteur uniforme g.

Pour deux points 1 et 2 représentants les extrémités du solide, la loi de la statique des fluides s'écrit :

$$P_2 - P_1 = \rho \times g \times (z_1 - z_2)$$

Puisque $z_1 < z_2$, on en déduit que $P_2 < P_1$.



Pour une même surface de contact S avec le fluide, on peut en déduire une relation entre les forces pressantes en A et B : $P_2 \times S < P_1 \times S$ soit $F_2 < F_1$.

Pour deux points à la même profondeur chacun d'un côté du solide, les forces pressantes se compensent.

Ainsi, la somme des forces pressantes exercées sur le solide est verticale et orientée vers le haut.

Si le solide est en équilibre, alors il est soumis à une force verticale dirigée vers le haut, due à la différence de pression entre ses parties inférieure et supérieure, qui compense son poids. Cette force est la poussée d'Archimède et représente la résultante des forces de pression exercées par le fluide environnant sur le solide.

4) Expression vectorielle de la poussée d'Archimède

Soit un objet cylindrique d'axe vertical, de hauteur h, de section d'aire S et de volume V = S x h, plongé dans un fluide incompressible de masse volumique ρ dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{k}$.

Au point 1, la force pressante verticale, dirigée vers le haut, vaut $\vec{F_1} = P_1 \times S \times \vec{k}$

Au point 2, la force pressante verticale, dirigée vers le bas, vaut $\vec{F_2} = -P_2 \times S \times \vec{k}$

La somme des forces pressantes appliquées au cylindre vaut : $\vec{F_1} + \vec{F_2} = (P_1 - P_2) \times S \times \vec{k}$

D'après la loi de la statique des fluides, on peut écrire :

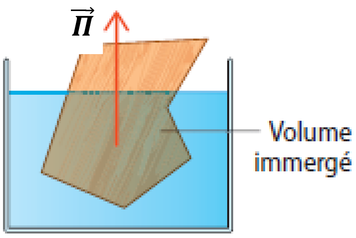
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \rho \times g \times (z_2 - z_1) \times S \times \vec{k} = \rho \times h \times S \times g \times \vec{k} = -\rho \times V \times \vec{g}$$

La résultante des forces est donc bien orientée vers le haut (dans le sens de $-\vec{g}$).
On remarque que le produit $\rho \times V$ est égal à la masse du fluide dont le cylindre immergé a pris la place. Ainsi, la résultante des forces est égale au poids du fluide déplacé.

La résultante des forces de pression exercées par un fluide de masse volumique ρ_{fluide} sur un corps solide qui y est plongé d'un volume $V_{immergé}$ est la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$. Elle est dirigée de bas en haut et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

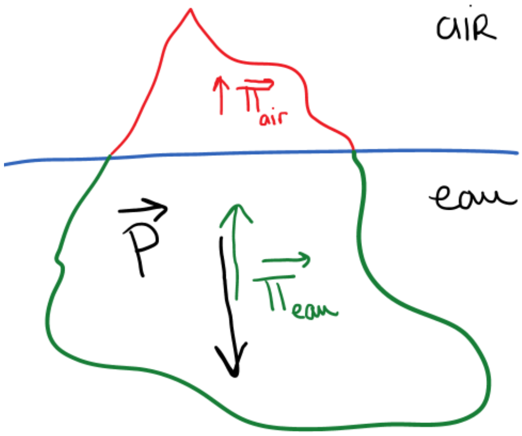
$$\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} \times V_{immergé} \times \vec{g}}$$

L'origine du vecteur $\vec{\Pi}$ est le centre de masse de la partie immergée du solide considéré.



***Exemple* : un iceberg subit trois forces :**

- Son poids P situé au centre de gravité de l'iceberg.
- La poussée d'Archimède due à l'air située au centre de masse de la partie émergée rouge (néglieable souvent car la masse volumique de l'air est très faible devant celle de l'eau)
- La poussée d'Archimède due à l'eau située au centre de masse de la partie immergée (bleue)



Remarque : La poussée d'Archimède est par convention notée $\vec{\Pi}$ dans ce cours. Suivant les manuels ou les exercices que vous trouverez, elle peut être notée $\vec{F_P}$ (comme dans votre livre), $\vec{P_A}$ ou $\vec{A}$.

La valeur numérique de la poussée d'Archimède se calcule par :

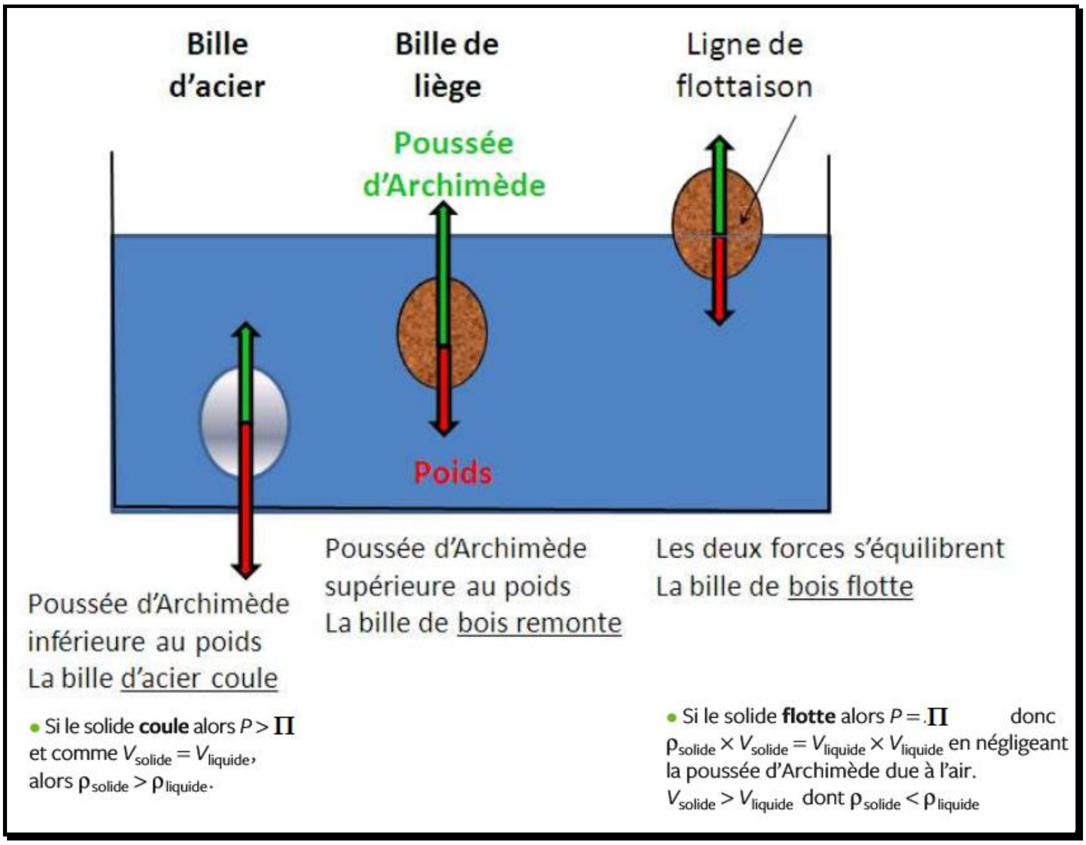
$$\boxed{\Pi = \rho_{fluide} \times V_{immergé} \times g}$$

Avec Π en newtons (N), ρ_{fluide} en kg·m^{-3}, V en m^3 et g en N·kg^{-1}.

<u>Exemple :</u> *Dans l'eau de mer de masse volumique ρ_{mer} = 1 025 kg·m^{-3}, on immerge totalement un cylindre en bois de peuplier, de hauteur H = 1,25 m, de section S = 0,250 m^2 et de masse volumique ρ_{bois} = 390 kg·m^{-3}. Calculer la poussée d'Archimède et le poids de cet objet. Conclure.*

La poussée d'Archimède qu'il subit a pour norme Π = ρ_{mer} x S x H x g = 3200 N et son poids P = ρ_{bois} x S x H x g = 1220 N.

Conclusion : Π > P, le cylindre remonte donc à la surface : le peuplier « flotte » dans l'eau.



II – Modélisation de l'écoulement d'un fluide

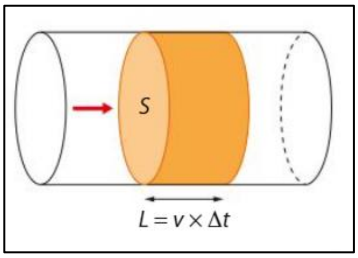
1) Hypothèses de travail

L'étude d'un fluide en mouvement est un problème extrêmement complexe. Cependant, sous certaines hypothèses, les équations de la mécanique des fluides se simplifient et permettent d'interpréter simplement les observations expérimentales.

- Un **fluide parfait** est un fluide non visqueux, dans lequel les forces de frottement au sein du fluide sont négligées.
- Si le fluide est **incompressible et homogène**, alors **la masse volumique du fluide est constante** au sein de fluide.
- **L'écoulement est supposé non tourbillonnaire**, c'est-à-dire qu'on négligera tout mouvement local de rotation au sein du fluide.
- **L'écoulement est supposé en régime permanent (ou stationnaire), c'est-à-dire que la vitesse et la pression en tout point du fluide sont indépendantes du temps.**

2) Le débit volumique

Le débit volumique est le volume de fluide qui s'écoule par unité de temps à travers une section droite de la conduite (ou de la canalisation) qui délimite le mouvement du fluide.



La distance L parcourue par le fluide à la vitesse v pendant la durée Δt vaut L = v x Δt.

Le volume V de fluide s'écoulant pendant la durée Δt est :
V = S x L = S x v x Δt.

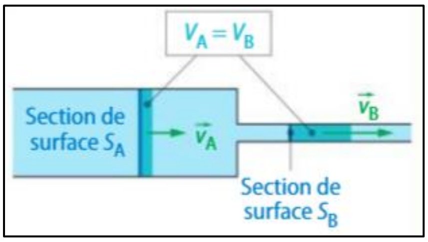
Le débit volumique D_V est par définition :

$$\boxed{D_V = \frac{V}{\Delta t} = S \times v}$$

Avec D_V en $m^3 \cdot s^{-1}$, V en m^3, Δt en s, S en m² et v en $m \cdot s^{-1}$.

3) Conservation du débit volumique d'un fluide incompressible

Un fluide incompressible s'écoule en régime permanent dans une conduite constituée de deux tubes de sections différentes. Pendant le même intervalle de temps Δt, le volume V_A du fluide se déplaçant dans le tube de section S_A est identique au volume V_B de liquide se déplaçant dans le tube de section S_B.



$V_A = V_B$ ou encore $S_A \times v_A \times \Delta t = S_B \times v_B \times \Delta t$
D'où $S_A \times v_A = S_B \times v_B$ ou encore $D_{VA} = D_{VB}$

Au cours d'un écoulement en régime permanent, le débit volumique d'un fluide incompressible se conserve :

$$\boxed{D_V = constante}$$

Par conséquent, si la section de la canalisation diminue, alors la vitesse du fluide augmente. On peut l'observer en pinçant l'extrémité d'un tuyau d'arrosage : l'eau sort plus vite (et va par conséquent plus loin !).

Cette loi permet de déterminer la vitesse du fluide en un point si on connaît le débit et l'aire de la section droite en ce point.

Exemple : *On remplit une carafe de volume V = 1,5 L avec de l'eau s'écoulant d'un robinet, en une durée Δt = 11 s. Sachant que la sortie du robinet est un disque de surface S = 3,1 x 10^{-4} m², calculer la vitesse de sortie de l'eau du robinet.*

Le débit volumique D_V vaut $D_V = \frac{V}{\Delta t} = \frac{1{,}5 \times 10^{-3}}{11} = 1{,}4 \times 10^{-4}\ m^3 \cdot s^{-1}$

Et $D_V = v_{robinet} \times S_{robinet}$

$v_{robinet} = \frac{D_V}{S_{robinet}} = \frac{1{,}4 \times 10^{-4}}{3{,}1 \times 10^{-4}} = 0{,}45\ m \cdot s^{-1}$

III – Relation de Bernoulli

Vidéo 1 : balle de ping pong dans un entonnoir :
https://www.youtube.com/watch?v=cOd_lkFqP_w (Université de Lille I)
Vidéo 2 : balle de ping pong en léviatation :
https://www.youtube.com/watch?v=WWHXTumy4RQ (Université de Lille I)

1) Place dans l'histoire des Sciences

Daniel Bernoulli est un médecin, mathématicien et physicien suisse. Il publie en 1738 « Hydrodynamica » où il expose ses théories sur la mécanique des fluides. On lui doit aussi l'énoncé du paradoxe de Saint-Pétersbourg, que les économistes financiers utilisent dans la fameuse « prime de risque », qui se résume par : « pourquoi, alors que mathématiquement l'espérance de gain est infinie à un jeu, les joueurs refusent-ils de jouer tout leur argent ? ».

Giovanni Baitista Venturi, prêtre et physicien italien, a découvert et formalisé en 1796 l'effet du même nom, reliant la vitesse d'un fluide et sa pression. Il invente le tube de Venturi, permettant de mesurer la différence de pression entre deux sections de diamètres différents d'un même tube.

2) Relation de Bernoulli

Vidéo 1 : Bernoulli https://www.youtube.com/watch?v=E32YHDTDy-4 (Université Lille I)

Soit un écoulement satisfaisant les hypothèses vues plus haut, le fluide n'étant soumis qu'au champ de pesanteur uniforme dans le référentiel supposé galiléen.

Avec un axe (Oz) vertical vers le haut, la relation de Bernoulli permet d'écrire en tout point M du fluide :

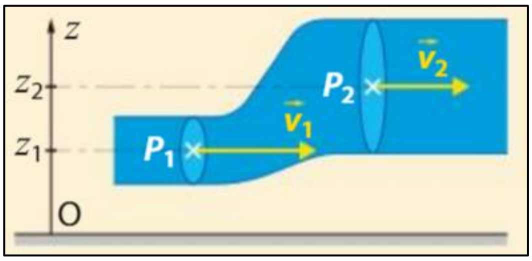
$$\boxed{\frac{\rho \times v^2}{2} + \rho \times g \times z + P = constante}$$

Avec ρ masse volumique du fluide en kg·m^{-3}, v vitesse du fluide au point considéré en m·s^{-1}, g intensité de pesanteur supposée constante 9,81 N·m^{-1}, z altitude du fluide au point M en m, P pression du fluide en M en Pa.

La formule n'est pas à connaître mais à savoir exploiter.

Ainsi, dans la conduite suivante, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\rho \times {v_1}^2}{2} + \rho \times g \times z_1 + P_1 = \frac{\rho \times {v_2}^2}{2} + \rho \times g \times z_2 + P_2$$



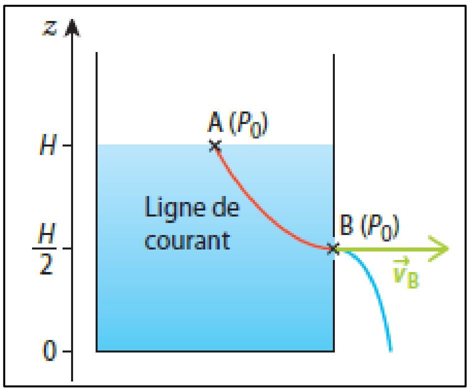
Remarque : la ligne virtuelle reliant les points 1 et 2 placés aux centres des disques s'appelle une **ligne de courant.**

Si le fluide est au repos (v = 0 m·s^{-1}), on retrouve la loi de la statique des fluides :

$\rho \times g \times z_1 + P_1 = \rho \times g \times z_2 + P_2$ et donc $P_1 - P_2 = \rho \times g \times (z_2 - z_1)$

Exemple :

Un réservoir cylindrique contient de l'eau assimilée à un fluide parfait et incompressible de masse volumique ρ_e. L'altitude nulle correspond à la base du réservoir. Un point A est à la surface de l'eau à l'altitude, supposée constante pendant la durée de l'expérience, z_A = H = 10 m, donc v_A = 0. Au point B à mi-hauteur (z_B = H/2), on perce un petit trou par lequel l'eau s'échappe à la vitesse v_B. L'ensemble baigne dans l'air à la pression atmosphérique donc P_A = P_B = P_0. On est en régime permanent et la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant qui joint A à B s'écrit :

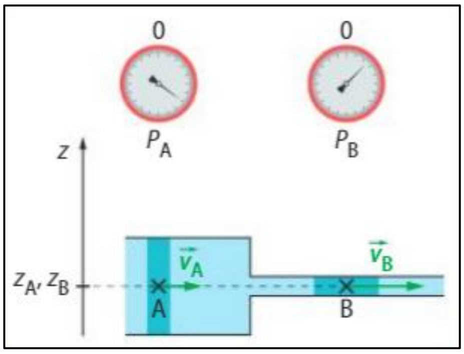


$$\frac{\rho_e \times 0}{2} + \rho_e \times g \times H + P_0 = \frac{\rho_e \times {v_B}^2}{2} + \rho_e \times g \times \frac{H}{2} + P_0$$

$$v_B = \sqrt{gH} = 9{,}9\ m \cdot s^{-1}$$

3) Effet Venturi

Le long de l'écoulement horizontal et permanent d'un fluide incompressible, la vitesse du fluide augmente et sa pression diminue lorsque l'aire de la section droite diminue.



Dans une conduite **horizontale** de section S_A possédant un étranglement de section $S_B<<S_A$, une dépression est observée au voisinage de l'étranglement.

D'après la relation de Bernoulli,

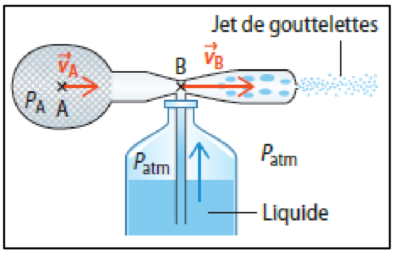
$$\frac{\rho \times {v_A}^2}{2} + \rho \times g \times z_A + P_A = \frac{\rho \times {v_B}^2}{2} + \rho \times g \times z_B + P_B$$

Or, $z_A = z_B$ et $v_B > v_A$ à cause de la loi de conservation du débit volumique :

$$\frac{\rho \times {v_A}^2}{2} + P_A = \frac{\rho \times {v_B}^2}{2} + P_B$$

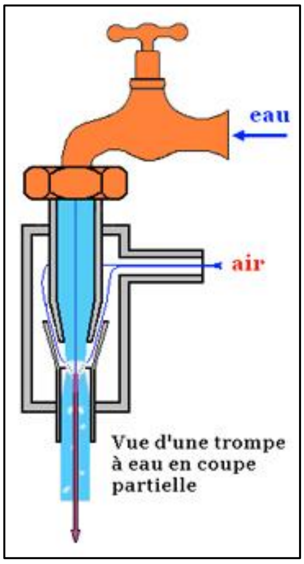
$$P_B - P_A = \frac{\rho}{2} \times (v_A^2 - v_B^2) < 0$$

On a bien $P_B < P_A$

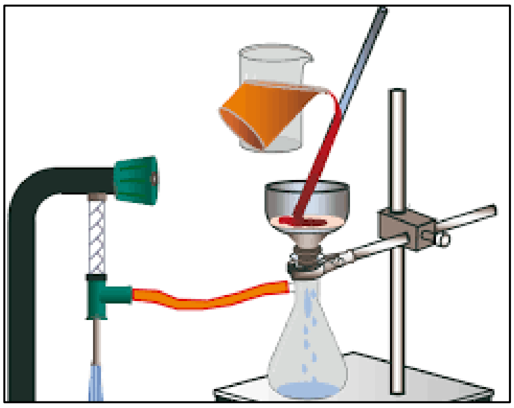


De très nombreux phénomènes sont associés à l'effet Venturi comme le principe de la poire d'aspiration d'un flacon de parfum. L'air pulsé en A passe par une zone où la section en B est étroite, sa vitesse augmente, donc si on assimile l'air à un fluide incompressible, sa pression diminue. La dépression en B provoque ainsi l'aspiration du parfum.

C'est aussi l'effet Venturi qui est responsable de l'aspiration au bout du tuyau d'une trompe à eau (voir filtration sur Buchner en TP).

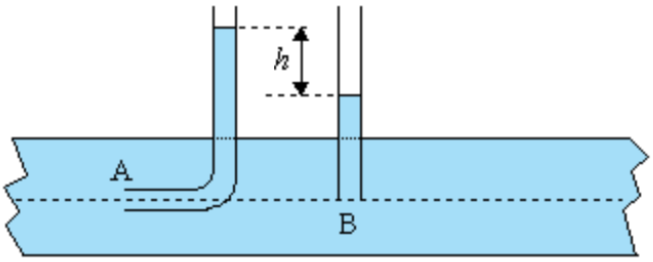


Quand on ouvre le robinet au maximum, l'eau jaillit à grande vitesse, et est propulsée dans un tout petit tube en dessous. La section diminuant, la vitesse augmente, et par effet Venturi, la pression dans la cavité diminue. La dépression permet d'aspirer l'air et d'essorer un solide humide sur un Buchner.



4) Comment déterminer la vitesse d'écoulement d'un fluide à l'aide d'un tube de Pitot

On considère un fluide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans ce fluide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités sont à la même hauteur.



- Les points A et B sont à la même cote : $z_A = z_B$
- Au point B, le liquide a la même vitesse v que dans la canalisation et la pression est notée p_B.
- En A la vitesse est nulle et la pression est notée pA. En effet, le fluide en équilibre dans le tube A, est immobile.

Application du théorème de Bernoulli :

$$p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_A = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_B$$

Comme les deux hauteurs h_1 et h_2 sont les mêmes, cette équation se simplifie :

$$p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}$$

De plus, la vitesse en A est nulle alors on peut écrire :

$$p_A = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}$$

Connaissant les pressions $p_A$et p_B et la masse volumique du fluide, on peut déterminer la vitesse du fluide en B.

$$v_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}$$

Si nous ne disposons pas d'instruments de mesure de la pression en A et B, on peut utiliser la loi fondamentale de la statique des fluides (vue en première) : $p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B)$
Soit dans ce cas : $p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot h$

$$\Leftrightarrow p_A = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow p_A - p_B = \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B) = \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}$$

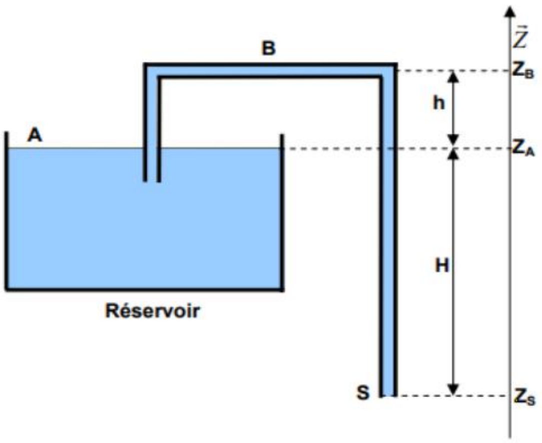
$$\Leftrightarrow \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow v_B = \sqrt{\frac{2\rho \cdot g \cdot h}{\rho}}$$

$$\Leftrightarrow v_B = \sqrt{2g \cdot h} \qquad \text{(Formule de Torricelli)}$$

Question :

Un grand réservoir d'eau est équipé d'un tube fin en U comme indiqué sur la figure ci-contre.



La pression atmosphérique est identique en A et en S.
La hauteur H est égale à H = 2,45 m.
La hauteur h est égale à h = 0,65 m.
La section du tube en S est égale à S_s = 1,00 cm
L'intensité de la pesanteur est g = 10,0 m.s^{-2}

***Question préliminaire** : Dans ce cas de figure, on considère que la vitesse de l'eau en A, v_A est nulle. Justifier cette hypothèse.*

1. *Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points A et S et en déduire la vitesse v_S de l'eau qui sort en S.*
2. *Calculer le débit volumique au point S.*

Réponse :

1) $\frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho V_S^2 + \rho g z_S + P_S$

Or $P_S = P_A = P_{atm}$

V_A=0 (Car le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement)

Donc $\boldsymbol{V_S} = \sqrt{2g(z_A - Z_S)} = \sqrt{\boldsymbol{2gh}}$

A.N : V_S = 7 m/s

2) Le débit volumique $\boldsymbol{q_V} = V_S.S = \boldsymbol{V_S}\frac{\boldsymbol{\pi d^2}}{\boldsymbol{4}}$

A.N : q_V=0,55 l/s