

Chapitre 6 : mouvement dans un champ uniforme

I) Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

a) Notion de champ uniforme

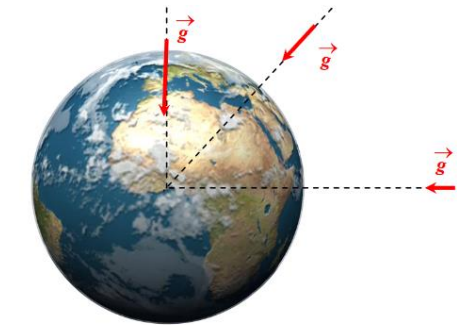
La Terre crée en son voisinage un champ de pesanteur noté \vec{g} . De ce fait, toute masse plongée dans ce champ voit apparaître une force qui l'attire vers le centre de la Terre et d'intensité :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

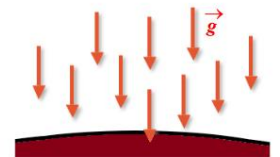
$P \text{ en } N$
 $m \text{ en } kg$
 $g \text{ en } N/kg \text{ ou } m/s^2$

Les caractéristiques du champ de pesanteur sont :

- Direction : radiale
- Sens : vers le centre de la Terre
- Intensité : $m \cdot g$



↑ Figure 1 : Champ non uniforme



↑ Figure 2 : Champ uniforme

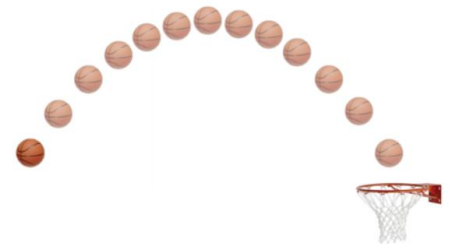
Donc, à l'échelle de la Terre, le champ de pesanteur n'est pas uniforme (2 vecteurs \vec{g} voisins ne sont pas EGAUX : même direction, même sens et même norme). Néanmoins, à l'échelle humaine, on admet que ce champ peut-être raisonnablement considéré comme UNIFORME.

b) Chute libre

Une chute libre est le mouvement d'un solide qui n'est soumis qu'à la force de son propre poids sous l'action de la pesanteur, ou lorsque les autres forces qui s'appliquent sur lui sont négligeables.

Exemple :

La balle de basket est en **chute libre** sur la **partie ascendante** et la **partie descente** car elle n'est soumise qu'à son poids (frottements négligés).



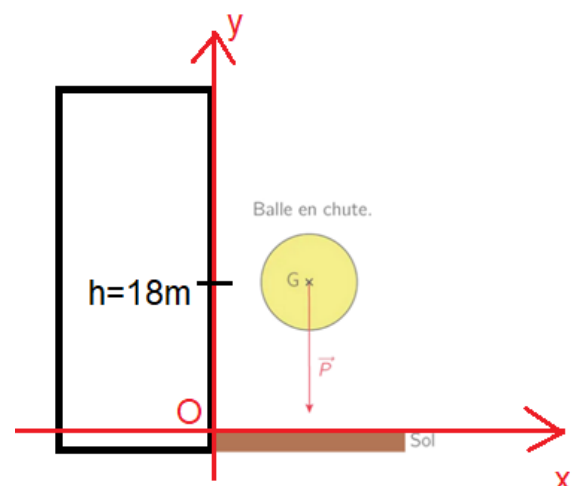
c) Etude de la chute libre sans vitesse initiale

Position du problème

Une bille masse $m=15,0g$ est en chute libre sans vitesse initiale. Elle a été lâchée d'un balcon au 6^{ème} étage situé à une hauteur $h=18,0m$.

On donne l'intensité de la pesanteur $g=9,81N/kg$.

Etablir les équations horaires de la vitesse et de la position.



On applique la méthode vue dans le chapitre précédent.

- 1) Système : la bille assimilée à un point matériel situé en son centre de masse.
- 2) Référentiel : terrestre supposé galiléen
- 3) Bilan des forces : chute libre donc **uniquement le poids** (vertical vers le centre de la Terre) $P=mg$

Projection du vecteur poids dans le repère (O,x,y) : $\vec{P} = (0 \cdot \vec{U}_x - mg \cdot \vec{U}_y)$

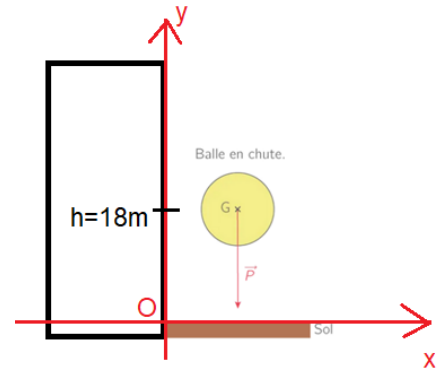
NB : le signe $-$ provient du fait que l'axe y est ascendant alors et le poids est descendant.

- 4) PFD : $\sum \vec{F} = \vec{P} = m \cdot \vec{a}$
- 5) On projette sur les axes Ox et Oy

Sur Ox : $0 = m \cdot a_x$

Sur Oy : $-mg = m \cdot a_y$

Finalement $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$: le mouvement se déroulera dans le plan contenant \vec{V}_0 et \vec{g} , donc dans (O,x,y) .



Pour obtenir la vitesse, on effectue une primitive de l'accélération

$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$, on exprime la primitive : $\begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -gt + B \end{cases}$ avec A et B deux constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

Condition initiale sur la vitesse : A $t=0s$, $\mathbf{v(t=0)=0}$, soit $\begin{cases} v_x(t=0) = A = 0 \\ v_y(t=0) = -g \times 0 + B = 0 \end{cases}$

Donc $A=B=0$. Il reste donc pour la vitesse :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x(t)=0 \\ v_y(t)=-gt \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la position on effectue une primitive de la vitesse.

$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0 \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -gt \end{cases}$, on exprime ma primitive : $\begin{cases} x(t) = C \\ y(t) = -g \frac{t^2}{2} + D \end{cases}$ avec C et D deux constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

Condition initiale sur la position : A $t=0s$, la bille est à la hauteur $h=18m$ soit $\begin{cases} x(t=0) = C = 0 \\ y(t=0) = -g \times \frac{0^2}{2} + D = h \end{cases}$

Donc $C=0$ et $D=h=18m$.

Finalement, il reste pour la position :

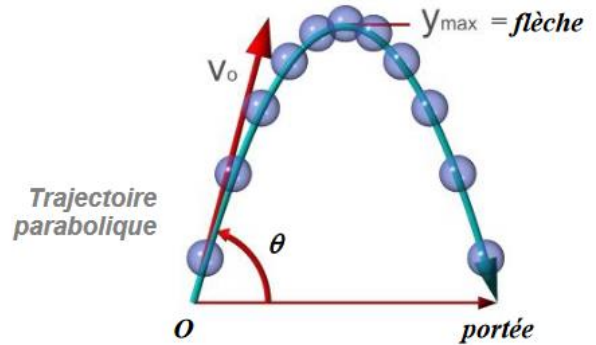
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -g \frac{t^2}{2} + h \end{cases}$$

d) Chute livre avec vitesse initiale non nulle

Position du problème : on effectue un tir avec un boulet de canon depuis le sol et avec une vitesse initiale V_0 non nulle. On négligera les frottements avec l'air.

On donne l'intensité de la pesanteur $g=9,81\text{N/kg}$.

Etablir les équations horaires du mouvement.



- 1) Système : le boulet assimilé à un point matériel situé en son centre de masse.
- 2) Référentiel : terrestre supposé galiléen
- 3) Bilan des forces : **uniquement le poids** (vertical vers le centre de la Terre) $P=mg$: c'est une chute libre.

Projection du vecteur poids dans le repère (O,x,y) : $\vec{P} = (0 \cdot \vec{U}_x - mg \cdot \vec{U}_y)$

NB : le signe - provient du fait que l'axe y est ascendant alors et le poids est descendant.

4) PFD : $\sum \vec{F} = \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

- 5) On projette sur les axes Ox et Oy

Sur Ox : $0 = m \cdot a_x$

Sur Oy : $-mg = m \cdot a_y$

2) Finalement $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$: le mouvement se déroulera dans le plan contenant \vec{V}_0 et \vec{g} , donc dans (O,x,y) .

Pour obtenir la vitesse, on effectue une primitive de l'accélération

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}, \text{ on exprime la primitive : } \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -gt + B \end{cases} \text{ avec A et B deux} \\ \text{constants à déterminer grâce aux conditions initiales.}$$

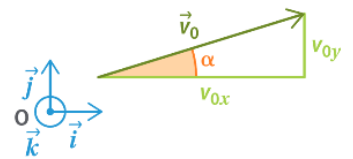
Condition initiale sur la vitesse : A $t=0s$, $\vec{v} = (v_0 \cos \theta \vec{u}_x + v_0 \sin \theta \vec{u}_y)$, soit

$$\begin{cases} v_x(t=0) = A = v_0 \cos \theta \\ v_y(t=0) = -g \times 0 + B = v_0 \sin \theta \end{cases}$$

Donc $A = v_0 \cos \theta$ et $B = v_0 \sin \theta$ Il reste donc pour la vitesse :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x(t) = v_0 \cos \theta \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta \end{pmatrix} \text{ Équations horaires de la vitesse}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ -gt + v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$



Par définition du cosinus,
 $\cos(\alpha) = \frac{v_{0x}}{v_0}$, d'où $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$.

De même, $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$.

Ainsi : $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour obtenir la position on effectue une primitive de la vitesse.

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos \theta \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -gt + v_0 \sin \theta \end{cases}, \text{ on exprime la primitive : } \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \theta t + C \\ y(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \theta t + D \end{cases} \text{ avec C et D deux} \\ \text{constants à déterminer grâce aux conditions initiales.}$$

Condition initiale sur la position : A $t=0s$, le boulet est à la hauteur $h=0$ (le sol) soit

$$\begin{cases} x(t=0) = v_0 \cos \theta \times 0 + C = 0 \\ y(t=0) = -g \times \frac{0^2}{2} + v_0 \sin \theta \times 0 + D = 0 \end{cases}$$

Donc $C=0$ et $D=0$

Finalement, il reste pour la position :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \theta t \\ y(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \theta t \end{cases} \text{ Équations horaires de la position}$$

$$\vec{OG} \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t \end{pmatrix}$$

Bilan : voici les équations horaires

Pour l'accélération :	Pour la vitesse :	Pour la position :
$a_x = 0$ $a_y = -g$ $a_z = 0$	$v_x = v_0 \cos \theta$ $v_y = -gt + v_0 \sin \theta$ $v_z = 0$	$x(t) = v_0 \cos \theta \times t$ $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta \times t$ $z(t) = 0$

Rem : Ce mouvement est plan car l'une des coordonnées du vecteur position \overrightarrow{OG} ne dépend pas du temps.

Equation de la trajectoire : C'est la fonction $y=f(x)$.

Pour l'obtenir on part des équations horaires de la position et on isole t dans la projection sur Ox et on l'injecte dans la deuxième équation de façon à « éliminer le temps. Ici :

$$x(t) = v_0 \cos \theta \ t \quad \text{soit} \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

Puis on injecte t dans la deuxième équation :

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \theta \ t$$

$$y = -g \frac{\left(\frac{x}{v_0 \cos \theta}\right)^2}{2} + v_0 \sin \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta}\right)$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2 + \tan \theta \cdot x$$

Equation du type $y = ax^2 + b \cdot x + c$: c'est une parabole tournée vers le bas car a est négatif

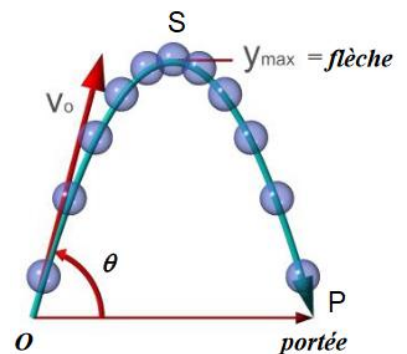
Portée :

Elle correspond à la distance OP, c'est-à-dire à la distance où l'ordonnée y est nulle.

La portée est définie par $y = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} (OP)^2 + \tan \theta (OP) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} (OP)^2 = \tan \theta (OP)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} (OP) = \tan \theta \Leftrightarrow OP = \tan \theta \times \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \Leftrightarrow OP = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \Leftrightarrow \boxed{OP = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta}$$



Rappel : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Flèche (altitude maximale atteinte) : c'est le sommet S

Le maximum d'une fonction est atteint quand sa dérivée est nulle $\frac{dy}{dx} = 0$ ou la vitesse verticale v_y est nulle (2 méthodes pour arriver au même résultat).

Méthode 1 : dérivée nulle pour le maximum $\frac{dy}{dx} = 0$

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2 + \tan \theta \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta$$

$$\Leftrightarrow x = \tan \theta \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

$$\Leftrightarrow y_s = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Rappel : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Méthode 2 : $V_y(t) = 0$ car la vitesse est horizontale au sommet

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta = 0$$

Soit $t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ que l'on injecte dans l'équation horaire de la position $y(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \theta t$

$$y_s = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right) + v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$y_s = -\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

$$y_s = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Ainsi, y_s est maximale si $\sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin \theta = \pm 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (seule valeur acceptable)

Portée maximale

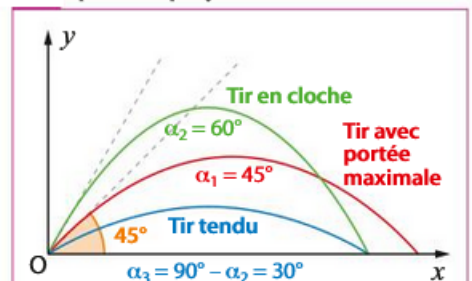
$OP = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ est maximale si $\sin 2\theta$ est maximal $\Leftrightarrow \sin 2\theta = 1$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow OP_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

L'altitude maximale, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, sera : $y_{s_{\max}} = \frac{v_0^2}{4g}$

Exemples de différentes trajectoires pour un projectile



La vitesse initiale du projectile est constante mais la direction du tir change. Pour obtenir une même portée il existe deux types de tirs : le tir tendu et le tir en cloche.

Aspect énergétique

Rappel de 1^{ère}

L'énergie cinétique que possède un objet ponctuel ou un objet en translation, de masse m se déplaçant à une vitesse v se note E_c et a pour expression : $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. L'énergie cinétique s'exprime en Joules (J) si la masse est en kilogramme (kg) et la vitesse en mètre par seconde ($m \cdot s^{-1}$).

L'énergie potentielle de pesanteur que possède un objet de masse m placé à l'altitude y se note E_{pp} et a pour expression : $E_{pp} = m \cdot g \cdot y$ avec m exprimée en kilogramme et y l'altitude exprimée en mètre, on obtient E_{pp} en joule.

On a également : $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ (à la surface de la Terre)

L'énergie mécanique que possède un objet est égale à la somme des énergies cinétiques et potentielles de pesanteur : $E_m = E_c + E_{pp}$ les trois énergies étant exprimées en joule.

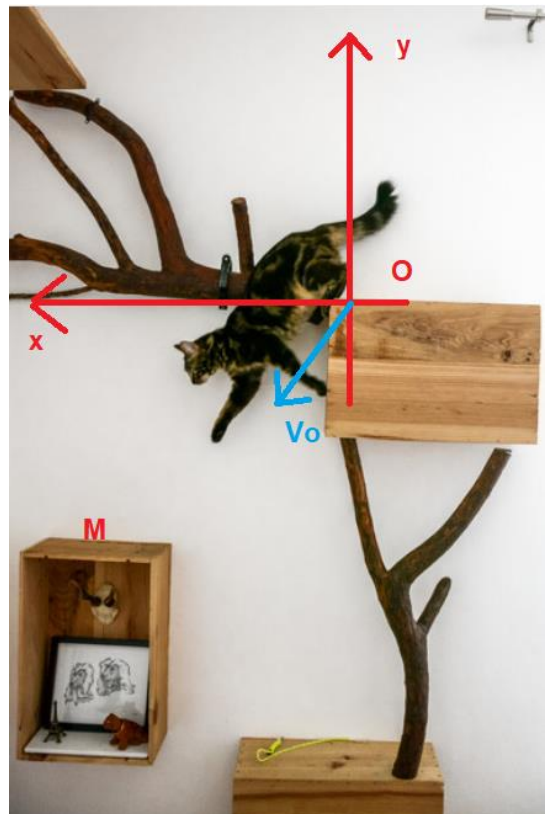
Puisque le système est uniquement soumis à son poids qui est une force conservative (voir cours de 1^{ère}), son **énergie mécanique est constante**.

Exemple : on suppose qu'un chat saute avec une vitesse initiale $v_0 = 2,5 \text{ m/s}$ à 1 m en dessous de sa position de départ. On négligera les frottements et on prendra comme origine de l'énergie potentielle, son altitude de départ.

Calculons sa vitesse au point M de l'image.

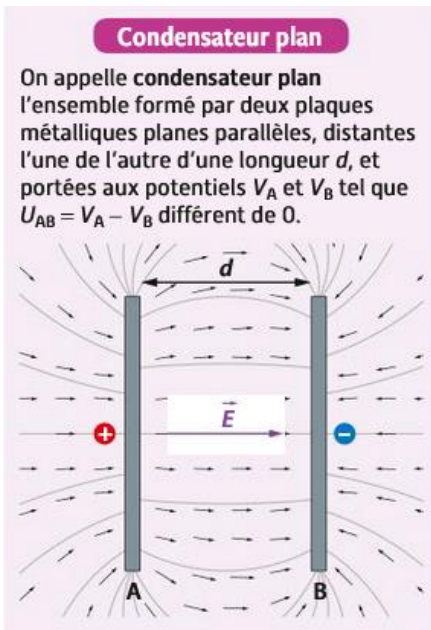
Ecrivons la **conservation de l'énergie mécanique** entre son point de départ O et un point M situé à 1 m sous le point O.

$$\begin{aligned} E_m(0) &= E_m(M) \\ E_c(0) + E_{pp}(0) &= E_c(M) + E_{pp}(M) \\ \frac{1}{2}mv^2(0) + mgy(0) &= \frac{1}{2}mv^2(M) + mgy(M) \\ \frac{1}{2}mv^2(0) &= \frac{1}{2}mv^2(M) + mgy(M) \\ v^2(0) &= v^2(M) + 2gy(M) \\ v(M) &= \sqrt{v^2(0) - 2gy(M)} \\ V(-2) &= \sqrt{(2,5)^2 - 2 \times 9,81 \times (-1)} = 5,1 \text{ m/s} \end{aligned}$$



II) Mouvement dans un champ électrique uniforme

1) Condensateur plan



Le champ électrique uniforme \vec{E} possède trois caractéristiques :

- **Une norme** : $E = \frac{|U_{AB}|}{d}$
- **Une direction** : perpendiculaire aux deux armatures planes.
- **Un sens** qui dépend du signe de U_{AB} : \vec{E} et AB colinéaires de même sens si $U_{AB} > 0$.

U_{AB} : la différence de potentiel entre les deux plaques A et B (V)

E : le champ électrique ($V \cdot m^{-1}$)

$$E = \frac{|U_{AB}|}{d}$$

d : distance entre les deux armatures A et B (m)

2) Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

On considère une particule ponctuelle G de charge q et de masse m placée dans un champ électrique uniforme E . Elle le pénètre avec une vitesse initiale horizontale V_0 non nulle (voir figure ci-contre).

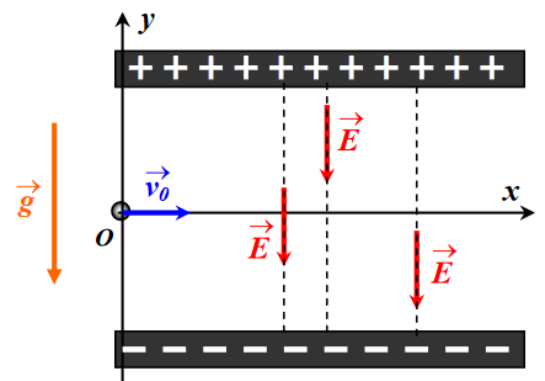
- **Système étudié** : particule G
- **Référentiel d'étude** : terrestre supposé galiléen
- **Bilan des forces extérieures** :
 - le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
 - la force électrique $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$
 - les forces de frottement de l'air $\vec{f} = k \cdot \vec{v}$
 - la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho_{air} \cdot V \cdot \vec{g}$

Avec V le volume de la particule, v sa vitesse, k une constante et ρ_{air} la masse volumique de l'air.

On admet que toutes les forces sont **NEGLIGEABLES** par rapport à la force électrique.

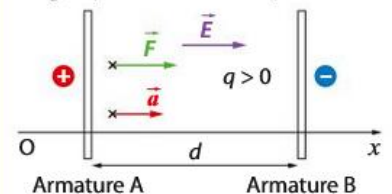
Il ne reste donc que

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

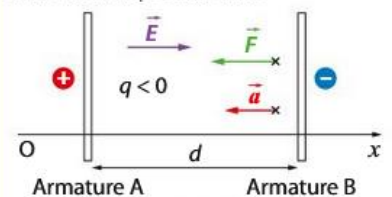


Particule chargée dans un champ électrique

EXEMPLES Mouvement d'une particule chargée $q > 0$ dans un champ \vec{E} uniforme



Mouvement d'une particule chargée $q < 0$ dans un champ \vec{E} uniforme



Dans les deux cas, \vec{F} et \vec{a} sont colinéaires et de même sens : la particule est

accélérée avec $a_x = \frac{qE_x}{m}$.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_e = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -qE \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{-qE}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qE}{m} \end{pmatrix}$$

- **ETAPE 1** : En cherchant les primitives des coordonnées du vecteur accélération, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \text{cste} \\ -\frac{qE}{m} \cdot t + \text{cste}' \end{pmatrix}$$

$$\text{Or à } t = 0, \text{ le vecteur vitesse s'écrit : } \vec{v}_0 \begin{pmatrix} \text{cste} \\ -\frac{qE}{m} \times 0 + \text{cste}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cste} \\ \text{cste}' \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part, d'après l'énoncé, le vecteur vitesse initiale s'écrit aussi } \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } \text{cste} = v_0 \text{ et } \text{cste}' = 0$$

$$\text{Donc } \vec{v} \begin{pmatrix} v_0 \\ -\frac{qE}{m} \cdot t \end{pmatrix}$$

- **ETAPE 2** : En cherchant les primitives des coordonnées du vecteur vitesse, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$\vec{OG} \begin{pmatrix} v_0 t + \text{cste} \\ -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} \cdot t^2 + \text{cste}' \end{pmatrix}$$

$$\text{Or à } t = 0, \text{ le vecteur position s'écrit : } \vec{OG} \begin{pmatrix} 0 \times t + \text{cste} \\ -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} \times 0^2 + \text{cste}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cste} \\ \text{cste}' \end{pmatrix}$$

$$\text{Et d'après l'énoncé la particule est en O à l'origine du temps, donc } \vec{OG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \text{cste} = \text{cste}' = 0$$

$$\text{Donc : } \vec{OG} \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

- **ETAPE 3** : On a obtenu **les équations horaires** définissant le mouvement de particule chargée :

$$x(t) = v_0 t$$

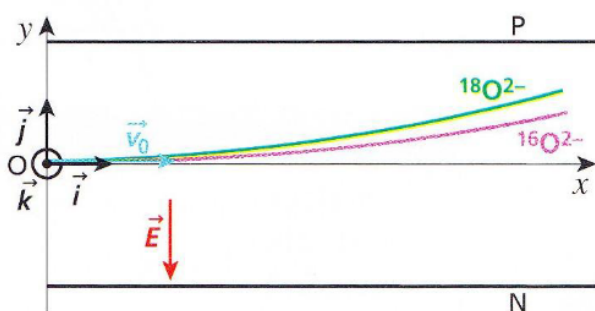
$$y(t) = -\frac{qE}{2m} \times t^2$$

- **ETAPE 4** : En combinant les équations horaires du mouvement , et en éliminant le temps, on obtient **l'équation de la trajectoire $y(x)$** :

$$y(x) = -\frac{qE}{2m \cdot v_0^2} \times x^2$$

Cette trajectoire est aussi une parabole car son équation est du type : $y(x) = ax^2 + bx + c$

Exemple : Déviation d'ions oxyde dans un champ électrique



Aspect énergétique

Rappel de 1^{ère} : théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide de masse m en translation entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures s'exerçant sur le solide.

$$E_{cB} - E_{cA} = \Sigma W_{AB}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Sigma W_{AB}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Appliquons ce théorème à la particule G dans le condensateur entre le point O (départ) et un point M quelconque.

$$\frac{1}{2} m v^2(M) - \frac{1}{2} m v^2(0) = W_{AB}(\vec{F})$$

Or la seule force non négligeable est la force électrique (qui est conservative car constante) donc

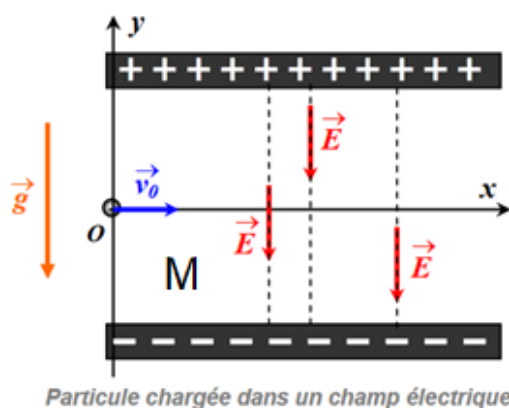
$$w_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}_e \cdot \vec{OM} = q\vec{E} \cdot \vec{OM} = -qE \cdot \vec{U}_y(-y) \cdot \vec{U}_y = q \cdot E \cdot y$$

Or d'après la formule du condensateur plan, $E = \frac{U}{y}$, donc

$$w_{AB}(\vec{F}) = qU$$

Finalement

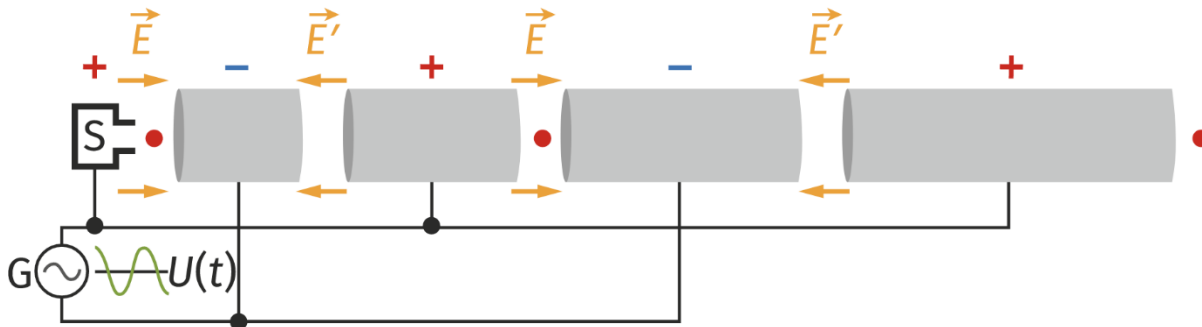
$$\frac{1}{2} m v^2(M) - \frac{1}{2} m v^2(0) = qU$$



Si la particule est initialement au repos, $v_0=0$, on en déduit la vitesse acquise pour une tension U entre les plaques du condensateur :

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Accélérateur linéaire de particules chargés

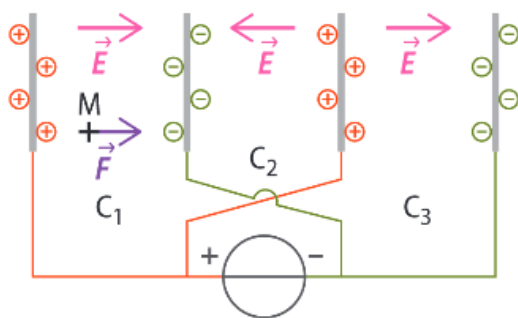


Un accélérateur linéaire de particules est un dispositif permettant de communiquer de l'énergie à des particules chargées. Il est constitué :

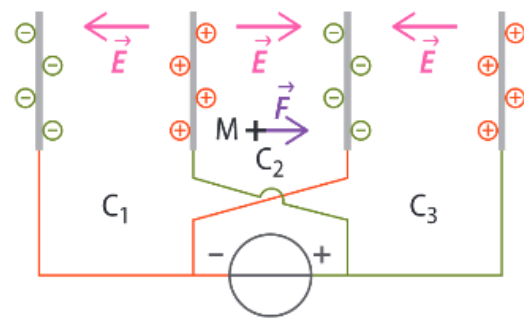
- D'une source S de particules (ions, électrons, etc.) ;
- D'un ensemble de tubes sous vide de longueur croissante, séparés par des interstices entre lesquels règne un champ électrique ;
- Éventuellement d'une cible ou d'un détecteur.

Un générateur de tension alternative permet de faire varier les signes des électrodes et de changer le sens des champs électriques.

Une particule est toujours attirée par une section de tube de signe contraire à sa propre charge.



Lorsque la particule chargée positivement est dans le condensateur C_1 , elle est accélérée.



Lorsque la particule se retrouve dans C_2 , on inverse la polarité du générateur (et donc des armatures des condensateurs) pour qu'elle soit de nouveau accélérée.